Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXVI, № 6

МАТЕМАТИКА

Ф. И. КАРПЕЛЕВИЧ

О НЕПОЛУПРОСТЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XII 1950)

Таблицы неполупростых максимальных подалгебр Ли были найдены впервые В. В. Морозовым [1]. Используя метод простых корней, развитый Е. Б. Дынкиным [2], мы доказываем в настоящей заметке простую общую теорему (см. теорему 4), заменяющую таблицы В. В. Морозова.

Основной результат В. В. Морозова состоит в том, что всякая неполупростая максимальная подалгебра полупростой алгебры Ли является регулярной, поэтому мы можем ограничиться рассмотрением регулярных подалгебр*.

Пусть G — полупростая алгебра Ли, а Σ — система ее корней. Всякой подсистеме $\widetilde{\Sigma}$ системы Σ такой, что

— A_1. Если $\alpha, \beta \in \widetilde{\Sigma}$ и $\alpha + \beta = \delta \in \Sigma$, то $\delta \in \widetilde{\Sigma}$ отвечает некоторая регулярная подалгебра $\widetilde{G}$ алгебры G.

При этом для того, чтобы $\widetilde{G}$ была неполупростой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

— A_2. Существует $\beta \in \widetilde{\Sigma}$ такой, что $-\beta \overline{\in} \widetilde{\Sigma}$.

Кроме того, если $\widetilde{G}_1$ отвечает $\widetilde{\Sigma}_1$, а $\widetilde{G} - \widetilde{\Sigma}$, то $\widetilde{G}_1 \subset \widetilde{G}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\Sigma}_1 \subset \widetilde{\Sigma}$.

Всякая регулярная подалгебра сопряжена некоторой подалгебре, которая содержится в одной из подалгебр, отвечающих системам $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$, удовлетворяющим условию A_1.

Поэтому для того, чтобы найти все с точностью до сопряженности неполупростые максимальные подалгебры алгебры G, достаточно найти все системы $\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$, удовлетворяющие A_1, A_2 и A_3:

— A_3. Если некоторая система $\widetilde{\Sigma}_1 \subseteq \Sigma$ удовлетворяет A_1 и $\widetilde{\Sigma} \subset \widetilde{\Sigma}_1$, то $\widetilde{\Sigma}_1 = \Sigma$.

В дальнейшем вместо того, чтобы говорить: подалгебра $\widetilde{G}$, отвечающая системе $\widetilde{\Sigma}$, мы будем говорить: подалгебра $\widetilde{\Sigma}$.

Лемма 1. *Пусть $\widetilde{\Sigma}$ — подалгебра и $\alpha_i \in \widetilde{\Sigma}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть, далее, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \delta \in \Sigma$. Тогда $\delta \in \widetilde{\Sigma}$.*

Доказательство. Мы докажем лемму 1 по индукции. Для $m = 2$ она выполняется по условию A_1. Пусть лемма 1 выполнена

* Все регулярные полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли найдены Е. Б. Дынкиным [3].

[redacted]

для $m-1$ слагаемых. Докажем ее для m слагаемых. Пусть $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\delta\in\Sigma$. Поскольку $\delta\neq 0$, для некоторого i $(\delta,\alpha_i)>0$ и, значит, $\delta-\alpha_i=\gamma\in\Sigma$. По предположению индукции $\gamma\in\tilde\Sigma$. Применяя A_1, получим $\alpha_i+\gamma=\delta\in\tilde\Sigma$.

Введем некоторые обозначения. Пусть S — произвольная система векторов в n-мерном пространстве. Будем обозначать через $-S$ систему векторов, получаемую из S отражением в точке 0. Положим $A(S)=S\cap(-S)$, $B(S)=S\setminus A(S)$.

Лемма 2. *Пусть $\tilde\Sigma$ — подалгебра и $\alpha_i\in\tilde\Sigma$ $(i=1,\ldots,m)$, $\beta\in B(\tilde\Sigma)$. Пусть, далее, $\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i+b\beta=0$, причем a_i $(i=1,\ldots,m)$, b — целые неотрицательные числа. Тогда $b=0$.*

Доказательство. Предположим противное и пусть $b\geqslant 1$. Имеем $\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i+(b-1)\beta=-\beta$. Отсюда, по лемме 1, $-\beta\in\tilde\Sigma$, но, кроме того, $\beta\in B(\tilde\Sigma)\subset\tilde\Sigma$, стало быть, $\beta\in A(\tilde\Sigma)$. Мы пришли к противоречию, так как очевидно, что $A(\tilde\Sigma)$ и $B(\tilde\Sigma)$ не пересекаются.

Теорема 1. *Пусть $\tilde\Sigma$ — неполупростая максимальная подалгебра. Тогда*

$$\tilde\Sigma\cup(-\tilde\Sigma)=\Sigma.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого корня ω либо $\omega\in\tilde\Sigma$, либо $-\omega\in\tilde\Sigma$. Предположим противное, и пусть существует $\omega\in\Sigma$ такой, что $\omega\notin\tilde\Sigma$ и $-\omega\notin\tilde\Sigma$.

Рассмотрим $\tilde\Sigma_1$, состоящую из корней, представляемых в виде $\sum a_i\alpha_i+k\omega$, где $\alpha_i\in\tilde\Sigma$, a_i, k — целые неотрицательные числа. Нетрудно видеть, что $\tilde\Sigma_1$ удовлетворяет A_1 и $\tilde\Sigma$ — собственная часть $\tilde\Sigma_1$. Поэтому, в силу A_3, $\tilde\Sigma_1=\Sigma$. Стало быть, для некоторых целых неотрицательных чисел a_i, k

$$\sum a_i\alpha_i+k\omega=-\beta, \tag{1}$$

где $\beta\in B(\tilde\Sigma)$. (Из A_2 следует, что $B(\tilde\Sigma)$ не пусто.)

Применяя аналогичные рассуждения к корню $-\omega$, получим

$$\sum b_i\alpha_i-l\omega=-\beta, \tag{2}$$

где b_i, l — целые неотрицательные числа.

Из (1) и (2) получаем $\sum(a_il+b_ik)\alpha_i+(k+l)\beta=0$. Из леммы 2 имеем $k+l=0$, а так как $k,l\geqslant 0$, то $k=l=0$. Значит, из (1) $\sum a_i\alpha_i=-\beta$, что противоречит лемме 2.

Из теоремы 1 следует, что для нахождения неполупростых максимальных подалгебр достаточно найти все неполупростые подалгебры $\tilde\Sigma$ такие, что

В. $\tilde\Sigma\cup(-\tilde\Sigma)=\Sigma$,

и выбрать из них те, которые удовлетворяют условию A_3.

Пусть $\tilde\Sigma$ — произвольная неполупростая подалгебра, удовлетворяющая В. Рассмотрим выпуклый конус K, состоящий из векторов вида $\sum b_i\beta_i$, где $\beta_i\in B(\tilde\Sigma)$, b_i — целые неотрицательные числа. Из леммы 2 вытекает, что выпуклый конус K не содержит ни одной прямой. Отсюда следует, что он лежит в некотором полупространстве (см., например, [4]), поэтому в пространстве корней можно ввести такой порядок, при котором всякий вектор из конуса K будет положительным. При этом порядке, очевидно, всякий корень из $B(\tilde{\Sigma})$ будет положительным. Заметим, что при введенном нами порядке всякий корень, не принадлежащий $\tilde{\Sigma}$, является отрицательным. Действительно, пусть $\omega \in \Sigma$ и $\omega \bar{\in} \tilde{\Sigma}$. Тогда из условия B следует, что $-\omega \in \tilde{\Sigma}$, а так как $\omega \bar{\in} \tilde{\Sigma}$, то $-\omega \in B(\tilde{\Sigma})$ и, значит, ω — отрицательный. Отсюда вытекает, что все положительные корни принадлежат $\tilde{\Sigma}$, и, стало быть, система простых корней $\Pi(\tilde{\Sigma})$ алгебры G, отвечающая введенному нами порядку, содержится в $\tilde{\Sigma}$.

Теорема 2. *Пусть* $\Pi_-(\tilde{\Sigma}) = A(\tilde{\Sigma}) \cap \Pi(\tilde{\Sigma})$ *и* $\Pi_+(\tilde{\Sigma}) = B(\tilde{\Sigma}) \cap \Pi(\tilde{\Sigma})$. *Система* $\tilde{\Sigma}$ *состоит из тех и только тех корней, которые при разложении по базису* $\Pi(\tilde{\Sigma})$ *имеют неотрицательные координаты по всем векторам из* $\Pi_+(\tilde{\Sigma})$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что все корни с неотрицательными координатами по всем векторам из $\Pi_+(\tilde{\Sigma})$ входят в $\tilde{\Sigma}$. Остается показать, что всякий $\omega \in \tilde{\Sigma}$ имеет неотрицательные координаты по всем векторам из $\Pi_+(\tilde{\Sigma})$. Достаточно ограничиться случаем, когда ω — отрицательный корень, но тогда $\omega \in A(\tilde{\Sigma})$. Заметим теперь, что так как $\tilde{\Sigma}$ — подалгебра, то $-\tilde{\Sigma}$ также подалгебра, а стало быть, $A(\tilde{\Sigma}) = \tilde{\Sigma} \cap (-\tilde{\Sigma})$ будет подалгеброй, причем, очевидно, полупростой. Обозначим через Π' систему ее простых корней. Наша теорема будет доказана, если мы покажем, что $\Pi_-(\tilde{\Sigma}) = \Pi'$. Очевидно, $\Pi_-(\tilde{\Sigma}) \subseteq \Pi'$. С другой стороны, если $0 < x \in A(\tilde{\Sigma}) \setminus \Pi_-(\tilde{\Sigma})$, то $x = \alpha + \beta$, где α, β — положительные корни, следовательно, $\alpha, \beta \in \tilde{\Sigma}$ и, в силу леммы 2, $\alpha, \beta \in A(\tilde{\Sigma})$. Итак, $x \bar{\in} \Pi'$. Таким образом, $\Pi_-(\tilde{\Sigma}) = \Pi'$.

Теорема 3. *Пусть* Π — *система простых корней* Σ. *Разобьем* Π *на два непустых множества* Π_- *и* Π_+ *и рассмотрим систему* $\Sigma(\Pi_-, \Pi_+)$, *состоящую из тех и только тех корней, которые при разложении по базису* Π *имеют неотрицательные координаты по всем векторам из* Π_+.

а) *Всякая неполупростая подалгебра, удовлетворяющая условию* B, *сопряжена одной из подалгебр* $\tilde{\Sigma}(\Pi_-, \Pi_+)$.

б) *Две подалгебры* $\tilde{\Sigma}(\Pi'_-, \Pi'_+)$ *и* $\tilde{\Sigma}(\Pi''_-, \Pi''_+)$ *сопряжены тогда и только тогда, когда* $\Pi'_- = \Pi''_-$ *и* $\Pi'_+ = \Pi''_+$.

Доказательство.

а) Пусть $\tilde{\Sigma}$ — неполупростая подалгебра, удовлетворяющая условию B. Всякий автоморфизм полупростой алгебры Ли индуцирует некоторое движение в пространстве корней, при котором система корней переходит в себя. Систему простых корней, построенную по любому порядку, можно перевести в данную систему Π некоторым внутренним автоморфизмом [5]. Пусть f — внутренний автоморфизм, переводящий систему простых корней $\Pi(\tilde{\Sigma})$ в систему Π. Положим $f\Pi_-(\tilde{\Sigma}) = \Pi_-$, $f\Pi_+(\tilde{\Sigma}) = \Pi_+$. Из теоремы 2 вытекает, что $f\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}(\Pi_-, \Pi_+)$.

б) Пусть подалгебра $\tilde{\Sigma}(\Pi'_-, \Pi'_+) = \tilde{\Sigma}'$ переводится в подалгебру $\tilde{\Sigma}(\Pi''_-, \Pi''_+) = \tilde{\Sigma}''$ внутренним автоморфизмом f. Легко видеть, что $fA(\tilde{\Sigma}') = A(\tilde{\Sigma}'')$. Заметим, что так как Π'_- есть система простых корней для подалгебры $A(\tilde{\Sigma}')$, то $f\Pi_-$ есть система простых корней подалгебры $fA(\tilde{\Sigma}') = A(\tilde{\Sigma}'')$ (относительно некоторого порядка). Пусть

φ — внутренний автоморфизм подалгебры $A(\breve{\Sigma}'')$, переводящий систему простых корней $f\Pi'_-$ в систему простых корней Π''_-. Так как φ — внутренний автоморфизм $A(\breve{\Sigma}'')$, то $\varphi\breve{\Sigma}'' = \breve{\Sigma}''$ и, значит, $\varphi f\breve{\Sigma}' = \breve{\Sigma}''$. Так как $\varphi f\Pi'_- = \Pi''_-$ и, кроме того, очевидно, $\varphi f B(\breve{\Sigma}') = B(\breve{\Sigma}'')$, то внутренний автоморфизм φf переводит множество положительных корней в себя. Но, как доказано в ([5]), всякий внутренний автоморфизм, переводящий в себя множество положительных корней, оставляет на месте каждый из корней. Но $\varphi f\Pi'_- = \Pi''_-$. Поэтому $\Pi'_- = \Pi''_-$ и, значит, $\Pi'_+ = \Pi''_+$.

Теорема 4. *Пусть Π — система простых корней G. Выделим из Π некоторый вектор β и пусть $\breve{\Sigma}(\beta)$ — подалгебра, состоящая из тех и только тех корней, которые при разложении по базису Π имеют неотрицательный коэффициент при β. Всякая неполупростая максимальная подалгебра сопряжена одной и только одной из подалгебр $\breve{\Sigma}(\beta)$.*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 3.

Поступило
15 XII 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Морозов, Диссертация, Казань, 1943. [2] Е. Б. Дынкин, Матем. сборн., 18 (60), 347 (1946); Усп. матем. наук, 2 : 4, 207 (1947). [3] Е. Б. Дынкин, ДАН, 73, № 5 (1950). [4] Н. Г. Чеботарев, Собр. соч., 2, 1949, стр. 332. [5] Е. Б. Дынкин, ДАН, 76, № 5 (1951).