Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

На правах рукописи

Ладилова Анна Александровна

Деформации исключительных простых алгебр Ли

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

Кузнецов Михаил Иванович

Нижний Новгород – 2010

Содержание

Введение

Диссертация посвящена исследованию фильтрованных деформаций исключительных градуированных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики три. Под исключительными градуированными алгебрами Ли понимаются алгебры Ли, которые содержат в качестве однородных идеалов простые алгебры Ли, не имеющие аналогов при больших характеристиках основного поля.

Задача описания фильтрованных деформаций градуированных алгебр Ли возникает в связи с классификацией простых алгебр Ли, которая является одной из центральных проблем теории модулярных алгебр Ли. Общая схема классификации простых алгебр Ли была разработана в 60-х годах XX века А.И. Кострикиным и И.Р. Шафаревичем, сформулировавшими в 1966 г. ([31]) основную классификационную гипотезу, согласно которой любая простая конечномерная ограниченная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 5$ либо является классической алгеброй Ли, либо изоморфна алгебре Ли картановского типа. Эту гипотезу доказали в 1984 г. Р.Е. Блок и Р.Л. Вильсон ([2], [3]).

Классификационная схема для неклассических простых алгебр Ли $\mathscr{L}$ состоит из следующих этапов:

1) построить максимальную подалгебру $\mathscr{L}_0$ в $\mathscr{L}$, которая определяет длинную неуплотняемую фильтрацию в $\mathscr{L}$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-q} \supset \ldots \supset \mathscr{L}_{-1} \supset \mathscr{L}_0 \supset \supset \mathscr{L}_1 \supset \ldots \supset \mathscr{L}_r \supset \mathscr{L}_{r+1} = \{0\}$, такую, что в ассоциированной градуированной алгебре Ли $L = \oplus_{i=-q}^{r} L_i$ подалгебра L_0 является классической редуктивной алгеброй Ли, то есть прямой суммой классических простых алгебр Ли и, возможно, одномерного центра;

2) получить классификацию простых градуированных алгебр Ли, облада-

ющих теми же свойствами, что и ассоциированная градуированная алгебры Ли L из п. 1), а именно, L — транзитивная алгебра Ли, L_0 — классическая редуктивная алгебра Ли, L_{-1} — неприводимый L_0-модуль, $L_{-i} = L_{-1}^i, i = 1, \ldots, q$;

3) найти все фильтрованные алгебры Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли из п. 2), то есть найти все фильтрованные деформации алгебр Ли из п. 2).

В 1970г. В.Г. Кац провел исследование градуированных алгебр Ли, удовлетворяющих условиям п. 2). Он сформулировал теорему, согласно которой градуированная алгебра Ли из п. 2) либо является классической, либо изоморфна градуированной алгебре Ли картановского типа. Эта теорема стала называться теоремой распознавания. В конце 60-х годов А.И. Кострикин и И.Р. Шафаревич построили серии неограниченных простых градуированных алгебр Ли картановского типа ([32]). В [24] В.Г. Кац предложил более общую конструкцию, включающую неградуированные алгебры Ли картановского типа. В 70-е годы В.Г. Кац ([25]) и Р.Л. Вильсон ([17]) получили качественное описание фильтрованных деформаций алгебр Ли картановского типа. Позднее в работах С.А. Тюрина [48], М.И. Кузнецова [37], М.И. Кузнецова и С.А. Кириллова [28], [29] и С.М. Скрябина [12], [46] найдены классы изоморфизма фильтрованных деформаций алгебр Ли картановского типа. Фильтрованные деформации исключительных простых алгебр Ли характеристики 5 исследовались в работах М.И. Кузнецова [10], [11]. В [11] была получена геометрическая реализация алгебр Мелякяна, то есть получено представление алгебры в виде градуированной по модулю 3 алгебры Ли, в которой компонента $L_{\bar{0}}$ является алгеброй Ли картановского типа, остальные компоненты реализованы как модули сечений геометрических расслоений над соответствующей алгеброй разделенных степеней, а умножение компонент задается инвариантными дифференциальными операторами. Метод М.И. Кузнецова построения геометрических реализаций, основанный на теории усеченных коиндуцированных модулей над транзитивными алгебрами Ли ([37]), был применен С.М. Скрябиным ([47]) и Г. Брауном ([5], [6]) для построения новых простых алгебр Ли над полями малой характеристики. В работе [47], кроме известных серий простых алгебр Ли — серии Франк T ([7]) и серии $\mathscr{R}$ ([20], [36]), — построены геометрические реализации новых простых градуированных алгебр Ли серий X, Y и Z.

В данной работе исследуются фильтрованные деформации исключительных алгебр Ли серий $\mathscr{R}$, X, Y и серии Франк над алгебраически замкнутым полем характеристики 3. Каждая серия алгебр Ли исследуется отдельно, однако реализация алгебр в геометрических терминах позволяет применить единый подход для исследования их деформаций. Этот подход основан на использовании усеченных коиндуцированных модулей и спектральной последовательности Серра-Хохшильда. В конечном итоге доказано, что все исследуемые алгебры Ли являются жесткими относительно фильтрованных деформаций, хотя возникающие в промежуточных вычислениях группы когомологий не всегда тривиальны.

Опишем содержание отдельных глав.

В главе 1 содержатся общие сведения из теории алгебр Ли, которые используются в работе. Определены когомологии алгебр Ли, в том числе когомологии Спенсера, введены обозначения для градуировок и фильтраций на группах когомологий, дано понятие спектральной последовательности Серра-Хохшильда. Существует несколько различных определений деформаций алгебр Ли, которые также изложены в этой главе. Более конкретно, приведены понятия геометрических и формальных деформаций, указана взаимосвязь между ними, изложены определения фильтрованной деформации градуированной алгебры Ли и деформации однородной подалгебры внутри градуированной алгебры Ли, а также показана связь между деформациями алгебр Ли и группами когомологий этих алгебр. Также излагаются сведения об алгебрах Ли картановского типа: общей, специальной и контактной, вводится стандартная градуировка, фильтрация, пополнение по фильтрации, описываются их однородные подалгебры, приводятся другие сведения, которые используются в данной работе. Наконец, вводятся понятия усеченных индуцированных и коиндуцированных модулей над транзитивными алгебрами Ли, приведена теорема о когомологиях транзитивной алгебры Ли с коэффициентами в коиндуцированном модуле.

Вторая глава посвящена доказательству жесткости алгебр серии Франк $T(m)$ относительно фильтрованных деформаций. В п. 2.1 приводится геометрическая реализация простых алгебр Ли $T(m)$ как $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр, построенная С.М. Скрябиным в работе [47]. Алгебра Франк $T(m)$ допускает также $\mathbb{Z}$-градуировку глубины 2, согласованную с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой. Особенностью алгебр Ли этой серии является возможность их представления в качестве однородной подалгебры в контактной алгебре Ли $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$. Такое представление было получено Г. Брауном в [4]. Кроме того, $T(m)$ является алгеброй контактного типа, поэтому, если она также удовлетворяет некоторым дополнительным условиям — условиям теоремы вложения из работы [10], то ее фильтрованная деформация допускает вложение в ту же самую контактную алгебру. Далее в п. 2.2 проверяется, что $T(m)$ удовлетворяет условию теоремы вложения, а значит, исследование фильтрованных деформаций алгебры $T(m)$ может быть сведено к описанию деформаций $T(m)$ внутри $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$. Из работы М.И. Кузнецова [10] известно, что локальные фильтрованные деформации однородной подалгебры L внутри алгебры Ли M описываются группой $H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L)$, а при выполнении условия $\mathrm{Lie\ Aut}_{(1)}M + \oplus_{i>0}(N_{\mathrm{Der}\,M}L)_i = \mathrm{ad}\,M_{(1)}$ — положительной частью первой группы когомологий $H^1_+(L, M/L)$. Поэтому следующим шагом является проверка выполнения приведенного выше условия, которое позволяет свести изучение фильтрованных деформаций алгебры

Ли $T(m)$ к вычислению группы $H^1_+(T(m), \mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m))$. Данная группа вычисляется в п. 2.3 следующим образом. Поскольку для алгебры Ли L и транзитивного L-модуля V положительная часть первой группы когомологий $H^1_+(L, V)$ может быть вложена в группу когомологий Спенсера $\oplus_{j>0} H^{j,1}(L, V)$, а $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m)$ является транзитивным $T(m)$-модулем, то тривиальность группы $H^1_+(T(m), \mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m))$ следует из тривиальности групп $H^{j,1}(T(m), \mathcal{K}(3\colon (1,1,m))/T(m))$, $j > 0$. Непосредственными вычислениями показывается, что для всех $j > 0$ указанные группы когомологий нулевые. Таким образом, можно сделать вывод о тривиальности локальных фильтрованных деформаций алгебры $T(m)$ внутри $\mathcal{K}(3\colon (1,1,m))$, что влечет жесткость $T(m)$ относительно фильтрованных деформаций.

В третьей главе исследуются фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathscr{R}$. Алгебры этой серии параметризуются двумя натуральными параметрами и являются $\mathbb{Z}_2$-градуированными алгебрами: $R(m_1, m_2) = W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus \oplus \Omega^2(m_1, m_2)$ и $R(m_1, m_2)^{(1)} = W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus B^2(\Omega(m_1, m_2))$, причем $R(m_1, m_2)^{(1)}$ — простая алгебра Ли. Алгебры $L = W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus M$, где $B^2(\Omega(m_1, m_2)) \subseteq \subseteq M \subseteq \Omega^2(m_1, m_2)$, допускают $\mathbb{Z}$-градуировку глубины 1. Используя приведенную ниже схему, установлено, что алгебры Ли L серии $\mathscr{R}$ являются жесткими. На первом этапе, в п. 3.1, доказывается вспомогательное утверждение о тривиальности подгруппы $H^2_+(W(2\colon (m_1, m_2)), M)$ второй группы когомологий. Здесь для упрощения вычислений используется факт, что $\Omega^2(m_1, m_2)$ является коиндуцированным $W(2\colon (m_1, m_2))$-модулем, а значит, достаточно показать тривиальность групп $H^i_+(W(2\colon (m_1, m_2))_{(0)}, \Omega^2(m_1, m_2)/\mathfrak{m}\Omega^2(m_1, m_2))$, $i = \overline{0, 2}$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в алгебре $O(m_1, m_2)$. Также применяются спектральные последовательности Серра-Хохшильда и точные когомологические последовательности. На втором этапе, в п. 3.2 , показывается, что в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ содержится подалгебра, изоморфная $W(2\colon (m_1, m_2))$. Для этого $\mathscr{L}$ разбивается на подпространства $\{V_i \oplus M_i\}$ из дополнений к членам фильтрации алгебры. Утверждается, что подпространства $\{V_i\}$ могут быть выбраны так, чтобы сумма $\oplus_i V_i$ являлась градуированной подалгеброй в $\mathscr{L}$, изоморфной $W(2\colon (m_1, m_2))$. Выбрав подходящий изоморфизм векторных пространств $\lambda\colon L \to \mathscr{L}$, умножение в $\mathscr{L}$ можно записать в виде $[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0}(\mu_r(u, v) + \nu_r(u, v))$. Здесь предполагается, что отображения μ_i принимают значения в $\oplus_i M_i$, а ν_i — в $\oplus_i V_i$. Тогда для первого μ_r в данном разложении, ненулевого на $W(2\colon (m_1, m_2))$, отображение $\lambda^{-1} \circ \mu_r$ является коциклом положительной степени алгебры $W(2\colon (m_1, m_2))$ с коэффициентами в M. Так как группа $H^2_+(W(2\colon (m_1, m_2)), M)$ тривиальна, существует линейное отображение $\psi\colon W(2\colon (m_1, m_2)) \to M$ такое, что $\delta\psi = \lambda^{-1} \circ \mu_r$. Применяя ψ к подпространствам V_i, получается новый набор подпространств, для которых значения μ_r в ограничении на $W(2\colon (m_1, m_2))$ тривиальны. Таким образом, индукцией по r можно получить требуемый набор $\{V_i\}$. В результате $\mathscr{L}$ является $W(2\colon (m_1, m_2))$-модулем, и следующий шаг состоит в доказательстве изоморфности L и $\mathscr{L}$ как $W(2\colon (m_1, m_2))$-модулей. Здесь с помощью универсального свойства коиндуцированных модулей удается вложить $\mathscr{L}$ в $W(2\colon (m_1, m_2)) \oplus \Omega^2(m_1, m_2)$, откуда и следует изоморфизм. Наконец, на последнем этапе устанавливается, что построенный изоморфизм градуированных $W(2\colon (m_1, m_2))$-модулей L и $\mathscr{L}$ в действительности является изоморфизмом алгебр Ли.

Четвертая глава посвящена описанию фильтрованных деформаций алгебр Ли серии Y. Это семейство простых алгебр Ли, зависящих от трех натуральных параметров $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ и, как и алгебры предыдущих серий, они наделены $\mathbb{Z}_2$-градуировкой, $Y(\overline{m}) = Y_{\bar{0}} \oplus Y_{\bar{1}}$, где $Y_{\bar{0}} = W(3\colon \overline{m})$, $Y_{\bar{1}} = \Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}}$. Естественные градуировки на алгебре $W(3\colon \overline{m})$ и модуле $\Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}}$ индуцируют $\mathbb{Z}$-градуировку глубины 2 алгебры $Y(\overline{m})$, согласованную с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой. При описании фильтрованных деформаций этих алгебр применяется схема, использованная при описании деформаций алгебр серии $\mathscr{R}$. Таким образом, сначала в п. 4.1 доказывается тривиальность подгруппы $H^2_{(0)}(W(3\colon \overline{m}), \Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}})$ второй группы когомологий. Метод вычисления также использует аппарат спектральных последовательностей и формулу для вычисления когомологий транзитивных алгебр с коэффициентами в усеченном коиндуцированном модуле. Затем в п. 4.2 в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ алгебры $Y(\overline{m})$ выделяется подалгебра, изоморфная $W(3\colon \overline{m})$. Здесь проводятся рассуждения, аналогичные рассуждениям в серии $\mathscr{R}$, однако, из-за иного строения однородных подпространств в $\mathbb{Z}$-градуировке алгебр серии Y, имеются некоторые отличия. Алгебра $\mathscr{L}$ разбивается на подпространства V_i, дополнительные к членам фильтрации. Далее показывается, что пространства V_{2i} можно выбрать так, чтобы их сумма $\oplus_i V_{2i}$ являлась подалгеброй в $\mathscr{L}$. Она и будет изоморфна $W(3\colon \overline{m})$. Доказательство носит индукционный характер. Общий шаг индукции выглядит следующим образом. Используя изоморфизм векторных пространств λ между $Y(\overline{m})$ и $\mathscr{L}$, умножение в $\mathscr{L}$ записывается в виде $[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0} \mu_r(u, v)$. Для наименьшего нечетного значения r такого, что $\mu_r(W(3\colon \overline{m}) \wedge W(3\colon \overline{m})) \neq 0$, отображение $\lambda^{-1} \circ \mu_r$ является коциклом из $Z^2_{(0)}(W(3\colon \overline{m}), \Omega^1(3\colon \overline{m})_{\mathrm{div}})$. Поэтому тривиальность соответствующей группы когомологий позволяет выбрать линейное отображение ψ, дифференциал которого равен $\lambda^{-1} \circ \mu_r$, и применить его к пространствам V_{2i}, взяв образы этих пространств за новый набор V_{2i}. При этом отображение μ_r при данном значении r станет тривиальным на $W(3\colon \overline{m})$. За конечное число шагов получается искомая подалгебра. П. 4.3 содержит собственно доказательство жесткости алгебр Ли серии Y относительно фильтрованных деформаций. Сначала, чтобы показать изоморфность $Y(\overline{m})$ и $\mathscr{L}$ как $W(3\colon \overline{m})$-модулей, используется свойство универсальности индуцированных модулей для доказательства вложения $Y(\overline{m})$ в $\mathscr{L}$. Сравнивая размерности, легко убедиться, что это вложение и есть искомый изоморфизм, причем можно считать, что он сохраняет фильтрацию. На последнем этапе с помощью индукции доказывается, что этот изоморфизм является изоморфизмом алгебр Ли. Таким образом, алгебры серии Y являются жесткими относительно фильтрованных деформаций.

В пятой главе рассматриваются алгебры Ли серии X и описываются фильтрованные деформации для простой градуированной алгебры Ли из этого семейства. Алгебры серии X реализуются как подалгебры в алгебре $Y(\overline{m})$, но зависят не только от параметра $\overline{m}$, но и от формы $\omega = hdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ из $\widehat{\Omega}(E)$. Геометрически эти алгебры описываются следующим образом: $X(\overline{m}, \omega) = X_{\overline{0}} \oplus X_{\overline{1}}$, где $X_{\overline{0}} = S(3\colon \overline{m}, \omega)$ — специальная алгебра Ли картановского типа, соответствующая форме ω, $X_{\overline{1}} = Z^1(\Omega(3\colon \overline{m})_{h^{-1}})$. В случае, когда $h = 1$, $X(\overline{m}, \omega)$ является однородной подалгеброй в градуированной алгебре Ли $Y(\overline{m})$, и ее третий коммутант — простая алгебра Ли, устроенная следующим образом: $X'''(\overline{m}) = X_{\overline{0}} \oplus X_{\overline{1}}$, где $X_{\overline{0}} = S(3\colon \overline{m})$, $X_{\overline{1}} = d(O'(3\colon \overline{m}))$, под $O'(3\colon \overline{m})$ подразумевается $S(3\colon \overline{m})$-подмодуль в $O(3\colon \overline{m})$ коразмерности 1. В работе описываются фильтрованные деформации именно такой алгебры. Результатом исследования является следующее утверждение: алгебра $X'''(\overline{m})$ не имеет фильтрованных деформаций, неизоморфных данной алгебре. Также, как и в случаях серий $\mathscr{R}$ и Y, первый шаг доказательства заключается в описании некоторой подгруппы второй группы когомологий, а именно, $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(O'(3\colon \overline{m})))$. Здесь используются те же методы вычисления: спектральные последовательности Серра-Хохшильда, формула для вычисления когомологических групп с коэффициентами в коиндуцированном модуле и точные последовательности. Однако, в отличие от рассмотренных ранее случаев, искомая группа когомологий может быть нетривиальна. Более точно, группа $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), Z^1(3\colon \overline{m}))$ порождена классами четырех коциклов, один из которых — c_0 имеет степень 1, а степени остальных строго больше единицы. Для доказательства этого факта используется реализация коприсоединенного модуля $S(3\colon \overline{m})$ в виде $\Omega^1(3\colon \overline{m})/Z^1(3\colon \overline{m})$, полученная Я.С. Крылюком в [34]. Кроме того, для случая трех переменных присоединенный и коприсоединенный модули для алгебры $S(3\colon \overline{m})$ изоморфны. Применяя точную последовательность $0 \to Z^1(3\colon \overline{m}) \to \Omega^1(3\colon \overline{m}) \to$ $\to B^2(3\colon \overline{m}) \to 0$, можно показать, что группа $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), Z^1(3\colon \overline{m}))$ изоморфна группе $H^1_+(S(3\colon \overline{m}), S(3\colon \overline{m}))$, описание которой получено в [18] (см. также [37]). Для трех последних коциклов, степень которых больше 1, получено их полное описание как образов дифференцирований $\mathrm{ad}(x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_k)$ алгебры $S(3\colon \overline{m})$ при связывающем гомоморфизме. Для коцикла степени 1 проводится его частичное исследование, заключающееся в нахождении значений этого коцикла на отрицательной части алгебры $S(3\colon \overline{m})$. Далее показывается, что группы $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), Z^1(3\colon \overline{m}))$ и $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), B^1(3\colon \overline{m}))$ изоморфны. Наконец, устанавливается, что отображение $\varphi\colon H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(O'(3\colon \overline{m}))) \to$ $\to H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), B^1(3\colon \overline{m}))$, соответствующее последовательности коэффициентов $0 \to d(O'(3\colon \overline{m})) \to B^1(3\colon \overline{m}) \to B^1(3\colon \overline{m})/d(O'(3\colon \overline{m})) \to 0$, инъективно, и классы коциклов, степень которых больше 1, не лежат в образе φ. В результате получается, что группа $H^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(O'(3\colon \overline{m})))$ не более чем одномерна. Следующий этап исследования заключается в выделении подалгебры в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ алгебры $X'''(\overline{m})$ с ассоциированной градуированной алгеброй, изоморфной $S(3\colon \overline{m})$. Также, как в случае серии Y, деформация $\mathscr{L}$ раскладывается в прямую сумму подпространств $\{V_i\}$, дополнительных к членам фильтрации. С помощью подходящего изоморфизма векторных пространств $\lambda\colon X'''(\overline{m}) \to \mathscr{L}$ умножение в $\mathscr{L}$ представимо в виде $[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0} \mu_r(u, v)$. Тогда для наименьшего нечетного значения r такого, что μ_r в ограничении на $S(3\colon \overline{m}) \wedge S(3\colon \overline{m})$ нетривиально, отображение $\lambda^{-1} \circ \mu_r$ является коциклом из $Z^2_{(0)}(S(3\colon \overline{m}), d(O'(3\colon \overline{m})))$. Минимальная степень нетривиального коцикла алгебры $X'''(\overline{m})$ равна 3, а значит, $\lambda^{-1} \circ \mu_3$ должен быть коциклом из $Z^2_+(X'''(\overline{m}), X'''(\overline{m}))$. Далее показывается, что этот коцикл не может быть когомологичным нетривиальному коциклу $c_{0|S(3\colon \overline{m}) \wedge S(3\colon \overline{m})}$, для чего используются установленные ранее свойства c_0. В результате, для любого положительного нечетного r можно выбрать линейное отображение ψ такое, что $\delta\psi = \lambda^{-1} \circ \mu_r$. При помощи отображения ψ можно построить новый набор пространств V_i, чтобы μ_r в ограничении на $S(3\colon \overline{m}) \wedge S(3\colon \overline{m})$ было тривиально. Повторяя эти рассуждения нужное количество раз, получатся такие V_i, что $\mathfrak{G} = \oplus_i V_{2i}$ является подалгеброй в $\mathscr{L}$. Ясно, что ассоциированная с ней градуированная алгебра изоморфна $S(3\colon \overline{m})$. Поскольку $S(3\colon \overline{m})$ не является жесткой относительно фильтрованных деформаций алгеброй, то либо $\mathfrak{G} \cong S(3\colon \overline{m})$, либо $\mathfrak{G} \cong S(3\colon \overline{m}, \omega)$, $\omega = (1 + x^{(\delta)})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Применяя универсальное свойство коиндуцированных модулей, получается вложение $\mathfrak{G}$-модуля $\mathscr{L}$ в $\mathfrak{G} \oplus \Omega^1(3\colon \overline{m})$, поэтому по соображениям размерности $\mathscr{L}$ и $X'''(\overline{m})$ являются изоморфными $S(3\colon \overline{m})$-модулями. Отображение λ устанавливает этот изоморфизм, более того λ является изоморфизмом алгебр Ли, что показано далее. Итак, алгебра $X'''(\overline{m})$ является жесткой относительно фильтрованных деформаций.

Результаты диссертации были представлены на международной конференции по алгебре и теории чисел, посвященной 80-летию В.Е. Воскресенского (Самара, 2007), на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 2007), на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша (Москва, 2008), на летней школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Самара, 2009), на нижегородских сессиях молодых ученых (Нижний Новгород, 2007, 2008, 2009), на всероссийских молодежных научных конференциях «Лобачевские чтения» (Казань, 2006, 2007, 2009), на научно-исследовательском семинаре «Избранные вопросы алгебры» (рук. проф. М.В. Зайцев, проф. А.А. Михалев, доц. И.А. Чубаров, МГУ, 2010), на научном семинаре по алгебре кафедры геометрии и высшей алгебры ННГУ (рук. проф. М.И. Кузнецов, 2010).

Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, в том числе 2 статьи ([42], [44]), из которых одна — в журнале, рекомендованном ВАК, 2 работы в материалах всероссийских конференций ([38], [41]), тезисы докладов на международных ([39], [40], [43]) и всероссийских конференциях ([45]).

Глава 1

Основные сведения

1.1. Когомологии алгебр Ли

Пусть L — алгебра Ли, M — модуль над L. Пространство n-мерных коцепей $\mathrm{Hom}(\wedge^n L, M)$ будем обозначать через $C^n(L, M)$. Положим $C^0(L, M) = M$. Определим дифференциал $\delta\colon C^n(L, M) \to C^{n+1}(L, M)$:

$$(\delta c)(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} a_i \cdot c(a_1, \ldots, \widehat{a}_i, \ldots, a_{n+1}) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (-1)^{i+j} c([a_i, a_j], a_1 \ldots, \widehat{a}_i, \ldots, \widehat{a}_j, \ldots, a_{n+1}),$$

где $c \in C^n(L, M)$, $a_i \in L$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда набор $C^*(L, M) = \{C^n(L, M), \delta\}$ является комплексом. Когомологиями алгебры Ли L с коэффициентами в M называется группа когомологий комплекса $C^*(L, M)$, которую мы обозначаем через $H^*(L, M)$.

Пусть на L и M определены градуировки: $L = \oplus_i L_i$, $M = \oplus_i M_i$, тогда группа $C^n(L, M)$ допускает градуировку $C^n(L, M) = \oplus_k C^n_k(L, M)$, где $C^n_k(L, M) = \{f \in C^n(L, M) | f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in M_{i_1+\ldots+i_n+k},\ a_{i_j} \in L_{i_j}\}$. Так как дифференциал δ — это отображение степени 0, то комплекс $C^*(L, M)$ является прямой суммой подкомплексов $C^*_k(L, M) = \{C^n_k(L, M)\}$. Таким образом, градуировки в L и M индуцируют градуировку на группе когомологий $H^*(L, M) = \oplus_k H^*_k(L, M)$, $H^n(L, M) = \oplus_k H^n_k(L, M)$. Соответствующая фильтрация задана пространствами $H^n_{(s)}(L, M) = \oplus_{k \geqslant s} H^n_k(L, M)$. Положим $H^n_+(L, M) = \oplus_{k>0} H^n_k(L, M)$.

Как известно, алгебра L действует тривиально на $H^n(L, M)$, $n \geqslant 0$. Кроме того, нам понадобится следующее утверждение о группе $H^n(L, M)$ (см., например, [23]).

Предложение 1. *Пусть L — алгебра Ли, M — некоторый L-модуль, $U(L)$ — универсальная обертывающая алгебра, Z — центр $U(L)$. Если $z \in Z \cap U^+(L)$ нетривиально действует на M, то $H^n(L, M) = 0$, $n \geqslant 0$.*

Когомологии подалгебры $L_- = \oplus_{i<0} L_i$ со значениями в градуированном L-модуле M будем называть когомологиями Спенсера. Обычно когомологии Спенсера снабжаются специальной градуировкой $H^{i,j}(L, M) = H^j_{i+j-1}(L, M)$ (см. [22]).

В частности, если $L_- = L_{-2} \oplus L_{-1}$ и $\dim L_{-2} = 1$, то группа когомологий $H^{i,j}(L, M)$ является группой когомологий комплекса $\{C^{i,j}(L, M), \delta\}$, где $C^{i,j}(L, M)$ — пространство полилинейных кососимметрических отображений $c\colon \wedge^j L_- \longrightarrow M$ таких, что $c(\wedge^j L_{-1}) \subset M_{i-1}$, $c(\wedge^{j-1} L_{-1} \otimes L_{-2}) \subset M_{i-2}$, а дифференциал $\delta\colon C^{i,j}(L, M) \longrightarrow C^{i-1,j+1}(L, M)$ определен, как и ранее.

Для этого случая справедливо следующее утверждение, доказанное в [10].

Предложение 2. *Если L-модуль M транзитивен, то отображение*

$$\overline{\varphi}\colon H^1_+(L, M) \longrightarrow \oplus_{j>0} H^{j,1}(L, M),$$

полученное ограничением коциклов с L на L_-, является вложением.

1.2. Спектральные последовательности

Введем определения и обозначения для спектральных последовательностей (см., например, [26], [23], [21]).

Последовательность комплексов $(E_r, d_r)_{r\geqslant 0}$, называется спектральной, если

1) $E_r = \oplus_{p,q\geqslant 0} E_r^{p,q}$,

2) $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$, $d_r \circ d_r = 0$,

3) $H^*(E_r) = E_{r+1}$.

Говорят, что спектральная последовательность сходится к E_∞, если, начиная с некоторого r, она стабилизируется: $E_r = E_{r+1} = \ldots$. Как известно, для фильтрованного комплекса $K^* = \{F^pK^*\}_{p\geqslant 0}$ существует спектральная последовательность (E_r, d_r) со следующими свойствами:

$$E_0^{p,q} = F^pK^{p+q}/F^{p+1}K^{p+q},$$
$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pK^*/F^{p+1}K^*),$$
$$E_\infty^{p,q} = F^pH^{p+q}(K^*)/F^{p+1}H^{p+q}(K^*).$$

Пусть $C^*(L, M)$ — коцепной комплекс алгебры Ли L, и I — идеал в L. Определим фильтрацию на $C^*(L, M)$ по правилу

$$F^pC^{p+q}(L, M) = \{c \in C^{p+q}(L, M) | c(a_1, \ldots, a_{p+q}) = 0, \text{ если } a_1, \ldots, a_{q+1} \in I\}.$$

Соответствующая спектральная последовательность (E_r, d_r) называется спектральной последовательностью Серра-Хохшильда (см. [9]).

Предложение 3. *Если I — идеал алгебры Ли L, то спектральная последовательность Серра-Хохшильда обладает свойством: $E_2^{p,q} = H^p(L/I, H^q(I, M))$.*

Если L и M градуированы, а I — однородный идеал в L, то спектральная последовательность Серра-Хохшильда также наделяется градуировкой. Спектральную последовательность, которая соответствует однородному подкомплексу $C_l^*(L, M)$ степени l комплекса $C^*(L, M)$, будем обозначать через $(E_{r,l}, d_r)$. Очевидно, что $(E_{r,l}, d_r)$ является однородной компонентой степени l спектральной последовательности Серра-Хохшильда, поэтому $E_{2,l}^{p,q} = H_l^p(L/I, H^q(I, M))$.

1.3. Деформации алгебр Ли

Существует несколько подходов к определению деформаций алгебр Ли. В работе [30] предложено следующее определение.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F. Структура алгебры Ли на пространстве V определяется кососимметрической формой $\varphi\colon V \wedge V \to V$, удовлетворяющей тождеству Якоби. Таким образом, в пространстве $\mathrm{Hom}(V \wedge V, V)$ множество $\mathcal{L}$ всех структур алгебры Ли на V является множеством нулей некоторой системы многочленов, то есть алгебраическим множеством. Группа $G = \mathrm{GL}(V)$ действует на $\mathcal{L}$ естественным образом: $(g \cdot \varphi)(u, v) = g\varphi(g^{-1}u, g^{-1}v)$, где $g \in G, \varphi \in \mathcal{L}$, $u, v \in V$. G-орбита алгебры Ли φ определяет ее класс изоморфизма.

Пусть (M, o) — неприводимое алгебраическое многообразие M с отмеченной точкой o. Деформацией алгебры Ли φ называется рациональный морфизм $f : M \to \mathcal{L}$ такой, что $f(o) = \varphi$. В действительности f определяет семейство алгебр Ли, структурные константы которых являются рациональными функциями на M. Деформации f_1 и f_2 называются эквивалентными, если существуют бирациональный изоморфизм $\psi : M_2 \to M_1$, $\psi(o_2) = o_1$, и рациональный морфизм $\chi : M_2 \to G$, $\chi(o_2) = e$, такие, что $f_2(m) = \chi(m) \cdot f_1(\psi(m))$.

Факторпространство $T_\varphi\mathcal{L}/T_\varphi G(\varphi) = H_{\mathrm{loc}}(\varphi)$ является пространством локальных деформаций алгебры φ. Так как $T_\varphi\mathcal{L}$ совпадает с группой коциклов $Z^2(\varphi, \varphi)$, а группа $B^2(\varphi, \varphi)$ содержится в $T_\varphi G(\varphi)$, то $H_{\mathrm{loc}}(\varphi)$ является фактором $H^2(\varphi, \varphi)$. Таким образом, если $H^2(\varphi, \varphi)$ тривиальна, то алгебра φ является жесткой, то есть все ее деформации изоморфны.

Вышеизложенный подход к деформациям алгебр Ли является геометрическим. Наряду с ним имеется понятие формальной деформации (см. [8]).

Пусть L — алгебра Ли над полем F. Через K обозначим поле частных кольца формальных степенных рядов $F[[t]]$, тогда $L_K = L \otimes_F K$ — алгебра Ли, полученная расширением поля скаляров. Пусть $f_t\colon L_K \times L_K \to L_K$ — билинейная функция над K, представимая в виде

$$f_t(x, y) = [x, y] + t^k F_k(x, y) + t^{k+1} F_{k+1}(x, y) + \dots,$$

где $x, y \in L$, F_i — билинейные функции над F, и $k > 0$ — наименьшее значение такое, что $F_k \not\equiv 0$. Потребуем, чтобы f_t удовлетворяла условию антисимметричности и тождеству Якоби, то есть $f_t(x, y) = -f_t(y, x)$ и $f_t(x, f_t(y, z)) + f_t(y, f_t(z, x)) + f_t(z, f_t(x, y)) = 0$ для всех $x, y, z \in L$. Тогда векторное пространство L_K с умножением f_t называется однопараметрическим семейством деформаций алгебры Ли L. Из ограничений, наложенных на f_t, следует, что

$$F_k(x, y) = -F_k(y, x)$$

и

$$-F_k([y, z], x) + F_k([x, z], y) - F_k([x, y], z) + \\ + [x, F_k(y, z)] - [y, F_k(x, z)] + [z, F_k(x, y)] = 0,$$

то есть F_k является элементом $Z^2(L, L)$. Будем называть F_k интегрируемым, если существует такое семейство f_t, что $f_t(x, y) = [x, y] + t^k F_k(x, y) + \ldots$.

Два семейства деформаций $f_t(x, y) = [x, y] + t^k F_k(x, y) + \ldots$ и $g_t(x, y) = [x, y] + t^k G_k(x, y) + \ldots$ будем называть эквивалентными, если существует автоморфизм пространства L_K вида

$$\Phi_t(x) = x + t^k \varphi_k(x) + t^{k+1} \varphi_{k+1}(x) + \ldots,$$

где $\varphi_i : L \to L$ линейны над F, такой, что $g_t(x, y) = \Phi_t^{-1} \circ f_t(\Phi_t(x), \Phi_t(y))$. Из последнего уравнения, в частности, следует, что $G_k(x, y) = F_k(x, y) + [x, \varphi_k(y)] + [\varphi_k(x), y] - \varphi_k([x, y]) = F_k(x, y) + \delta\varphi_k(x, y)$. Таким образом, классу эквивалентных деформаций соответствует элемент группы $H^2(L, L)$.

Семейство f_t называется тривиальным, если оно эквивалентно тождественной деформации g_t, определенной формулой $g_t(x, y) = [x, y]$.

Пусть $f_t(x, y) = [x, y] + t^k F_k(x, y) + \ldots$, $F_k \not\equiv 0$ – однопараметрическое семейство деформаций алгебры Ли L, причем $F_k = \delta\varphi_k$ для некоторой 1-коцепи φ_k. Тогда, полагая $\Phi_t(x) = t^k \varphi_k(x)$, имеем $\Phi_t^{-1} \circ f_t(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = [x, y] + t^{k+1} F'_{k+1}(x, y) + t^{k+2} F'_{k+2}(x, y) + \ldots$, то есть F'_{k+1} принадлежит $Z^2(L, L)$. Таким образом, если $H^2(L, L) = 0$, то алгебра L жесткая, то есть все ее деформации тривиальны.

Следует подчеркнуть, что жесткость алгебры Ли в формальном смысле влечет за собой жесткость в геометрическом смысле. Обратное, вообще говоря, неверно, но, как показано в [13], при выполнении некоторых дополнительных условий «геометрическая» и «формальная» жесткость алгебр эквивалентны.

В случае, если алгебра Ли градуирована, то имеет смысл понятие фильтрованной деформации. Пусть $L = \oplus_{i=-q}^{r} L_i$ — градуированная алгебра Ли. Соответствующую фильтрацию обозначим через $\{L_{(i)}\}$, где $L_{(i)} = \sum_{j \geqslant i} L_j$. Фильтрованная алгебра Ли $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{(-q)} \supset \mathscr{L}_{(-q+1)} \supset \ldots \supset \mathscr{L}_{(r)} \supset 0$ такая, что $\operatorname{gr} \mathscr{L} \cong L$, называется фильтрованной деформацией алгебры L.

Выберем в $\mathscr{L}$ набор подпространств $\{V_i\}$, дополнительных к членам фильтрации, $\mathscr{L}_{(i)} = V_i \oplus \mathscr{L}_{(i+1)}$. Тогда условие $\operatorname{gr} \mathscr{L} \cong L$ означает, что существует изоморфизм векторных пространств $\lambda \colon L \to \mathscr{L}$, для которого $\lambda(L_i) = V_i$ и $\operatorname{gr} \circ \lambda(x) = x$, $x \in L_i$. При этом умножение в $\mathscr{L}$ можно представить в виде

$$[\lambda(x), \lambda(y)] = \lambda([x, y]) + \mu_1(x, y) + \mu_2(x, y) + \ldots,$$

где $x \in L_i, y \in L_j$ и $\mu_i \in \operatorname{Hom}(L \wedge L, \oplus_k V_k)_i$ — кососимметрическое билинейное однородное отображение степени i. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — наименьшее значение, при котором $\mu_k \not\equiv 0$, тогда μ_k удовлетворяет условиям

$$\mu_k(x, y) = -\mu_k(y, x),$$

$$\begin{aligned}
&- \mu_k([y, z], x) + \mu_k([x, z], y) - \mu_k([x, y], z) + \\
&\qquad + \lambda([x, \lambda^{-1} \circ \mu_k(y, z)]) - \lambda([y, \lambda^{-1} \circ \mu_k(x, z)]) + \lambda([z, \lambda^{-1} \circ \mu_k(x, y)]) = 0
\end{aligned}$$

для $x, y, z \in L$. Следовательно, $\varphi_k = \lambda^{-1} \circ \mu_k$ является однородным коциклом степени k. Так как выбор пространств V_i неоднозначен, то мы можем рассмотреть другой набор пространств $\{V'_i\}$, дополнительных к членам фильтрации, в котором V'_i является образом V_i при действии невырожденного линейного отображения $\Psi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ вида $\Psi = 1 + \psi_k + \psi_{k+1} + \ldots$, где ψ_i — однородное линейное отображение степени i. Тогда

$$[\Psi \circ \lambda(x), \Psi \circ \lambda(y)] = \Psi \circ \lambda([x, y]) + \mu'_k(x, y) + \mu'_{k+1}(x, y) + \ldots .$$

С другой стороны,

$$[\Psi \circ \lambda(x), \Psi \circ \lambda(y)] = \Psi \circ \lambda([x, y]) + \mu_k(x, y) + \\ + \lambda([\lambda^{-1} \circ \psi_k \circ \lambda(x), y]) + \lambda([x, \lambda^{-1} \circ \psi_k \circ \lambda(y)]) - \psi_k \circ \lambda([x, y]) + \ldots .$$

Таким образом, если обозначить $\lambda^{-1} \circ \mu'_k$ через φ'_k, то $\varphi'_k = \varphi_k + \delta(\lambda^{-1} \circ \psi_k \circ \lambda)$, то есть деформации $\mathscr{L}$ соответствует когомологический класс элемента φ_k.

Пусть $[\lambda(x), \lambda(y)] = \lambda([x, y]) + \lambda \circ \varphi_k(x, y) + \ldots$, где $\varphi_k = \delta(\lambda^{-1} \circ \psi_k \circ \lambda)$ для некоторого линейного отображения степени k на пространстве $\mathscr{L}$. По аналогии со случаем формальных деформаций, применим автоморфизм $\Psi = 1 + \psi_k$ векторного пространства $\mathscr{L}$, тогда $[\lambda(x), \lambda(y)] = \lambda([x, y]) + \lambda \circ \varphi'_{k+1}(x, y) + \ldots$, где $\varphi'_{k+1} \in Z^2_{k+1}(L, L)$. И мы также можем заключить, что если $H^2_+(L, L) = 0$, то алгебра L является жесткой относительно фильтрованных деформаций.

Наконец, можно ввести понятие фильтрованной деформации однородной подалгебры внутри градуированной алгебры Ли (см. [10]).

Пусть $M = \oplus_i M_i$ — конечномерная градуированная алгебра Ли, $L = \oplus_i L_i$ — градуированная подалгебра в M такая, что $L_i \subset M_i$. Фильтрованная алгебра Ли $\mathscr{L}$ называется фильтрованной деформацией алгебры L внутри M, если

1) существует вложение алгебр Ли $j\colon \mathscr{L} \to M$ такое, что $j(\mathscr{L}_{(i)}) \subset M_{(i)}$ и

2) $\mathrm{gr}\ j(\mathscr{L}) = L$.

Отождествим $\mathscr{L}$ с $j(\mathscr{L})$, тогда произвольный элемент $u_i \in \mathscr{L}_{(i)} \setminus \mathscr{L}_{(i+1)}$ можно представить в виде $u_i = x_i + \varphi_k(x_i) + \varphi_{k+1}(x_i) + \ldots$, где $\varphi_j \in \mathrm{Hom}(L, M)_j$ —

однородное линейное отображение степени j, $k > 0$ — такое минимальное значение, что $\varphi_k(L) \neq 0$. Выбор элемента u_i такого, что $\operatorname{gr} u_i = x_i$, определен с точностью до слагаемых из $\mathscr{L}_{(i+1)}$. Пусть $u_i' = u_i + \psi(u_i)$, где $\psi(u_i) \in \mathscr{L}_{(i+k)} \backslash \mathscr{L}_{(i+k+1)}$, тогда $u_i' - u_i \equiv z_{i+k} \mod (M_{i+k+1})$, $z_{i+k} \in L_{i+k}$. Следовательно, отображение $\overline{\varphi}_k = \pi \circ \varphi_k \colon L \to M/L$ степени k, где $\pi \colon M \to M/L$ — каноническая проекция, не зависит от выбора u_i.

Пусть $u_i \in \mathscr{L}_{(i)} \backslash \mathscr{L}_{(i+1)}$, $u_j \in \mathscr{L}_{(j)} \backslash \mathscr{L}_{(j+1)}$. Тогда $[x_i, x_j] + \varphi_k([x_i, x_j]) \equiv [x_i + \varphi_k(x_i), x_j + \varphi_k(x_j)] \equiv [x_i, x_j] + [x_i, \varphi_k(x_j)] + [\varphi_k(x_i), x_j] \mod (M_{i+j+k})$, откуда получаем $\overline{\varphi}_k([x_i, x_j]) = x_i \cdot \overline{\varphi}_k(x_j) - x_j \cdot \overline{\varphi}_k(x_i)$, то есть $\overline{\varphi}_k \in Z^1_k(L, M/L)$.

Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ – две фильтрованные деформации алгебры L внутри M, которым соответствуют коциклы порядка k: $\overline{\varphi}_k$ и $\overline{\varphi}'_k$, соответственно. $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ будем называть эквивалентными, если существует автоморфизм Ψ алгебры M, $\Psi = 1 + \psi_k + \psi_{k+1} + \ldots$, $\psi_j \in \operatorname{Hom}(M, M)_j$, $0 \not\equiv \psi_k \in \operatorname{Der}_k M$, такой, что $\Psi(\mathscr{L}) = \mathscr{L}'$. В этом случае для $u_i \in \mathscr{L}_{(i)} \backslash \mathscr{L}_{(i+1)}$, $u_i' \in \mathscr{L}'_{(i)} \backslash \mathscr{L}'_{(i+1)}$ имеем $x_i + \psi_k(x_i) + \varphi_k(x_i) \equiv x_i + \varphi'_k(x_i) \mod (M_{i+k+1})$. Откуда $\overline{\varphi}'_k = \overline{\varphi}_k + \overline{\psi}_k$, где $\overline{\psi}_k = \pi \circ \psi_{k|L}$. Таким образом, классу эквивалентности деформации $\mathscr{L}$ внутри M соответствует элемент $\widehat{\varphi} \in H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L) = \oplus_{r>0} H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L)_r$, где $H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L)_r = Z^1_r(L, M/L)/(\overline{\text{Lie Aut}_{(1)} M})_r$. Под $(\overline{\text{Lie Aut}_{(1)} M})_r$ следует понимать $((\text{Lie Aut}_{(1)} M)_r + N_{\operatorname{Der} M}(L)_r)/N_{\operatorname{Der} M}(L)_r$.

Предложение 4. *Если* $H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L) = 0$*, то существует автоморфизм* Ψ *алгебры Ли* M *такой, что* $\Psi(\mathscr{L}) = L$.

Следующее предложение позволяет свести вычисление группы $H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L)$ к вычислению $H^1_+(L, M/L)$.

Предложение 5. *Если* $\text{Lie Aut}_{(1)} M + \oplus_{i>0} N_{\operatorname{Der} M}(L)_i = \operatorname{ad} M_{(1)}$*, то группы когомологий* $H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L)$ *и* $H^1_+(L, M/L)$ *совпадают.*

1.4. Алгебры Ли картановского типа

Пусть E — конечномерное векторное пространство размерности n. Согласно [32] (см. также [14] и [15]), алгебра разделенных степеней $\mathcal{O}(E)$ определяется как алгебра с образующими $x^{(\alpha)}$, $x \in E, \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и соотношениями

$$x^{(0)} = 1,$$
$$x^{(\alpha)}x^{(\beta)} = \binom{s+t}{s} x^{(\alpha+\beta)},$$
$$(ax)^{(\alpha)} = a^{\alpha}x^{(\alpha)},\ a \in F,$$
$$(x+y)^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^{\alpha} x^{(i)}y^{(\alpha-i)},\ x, y \in E.$$

Для некоторого флага $\mathcal{F}\colon E = E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_{k+1} = 0$ зафиксируем базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в E, согласованный с $\mathcal{F}$. Пусть $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n)$, где $m_i = \max\{j | x_i \in E_j\}$. Тогда $\mathcal{O}(\mathcal{F}) = \mathcal{O}(n : \overline{m}) = \{x^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha_1)} \ldots x_n^{(\alpha_n)} | 0 \leqslant \alpha_i < p^{m_i}\}$ является подалгеброй в $\mathcal{O}(E)$. На алгебре разделенных степеней можно определить естественную $\mathbb{Z}$-градуировку, считая $\deg x^{(\alpha)} = |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Тогда $\mathcal{O}(n\colon \overline{m})$ — однородная подалгебра.

Множество дифференцирований D алгебры $\mathcal{O}(E)$ таких, что $D(x^{(s)}) = x^{(s-1)}D(x)$, образуют алгебру Ли специальных дифференцирований $W(E)$, которая является свободным модулем над $\mathcal{O}(E)$ с базисом $\{\partial_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Элементы $x^{(\alpha)}\partial_i \in W(E)$, где $x^{(\alpha)} \in \mathcal{O}(n\colon \overline{m})$, порождают подалгебру в $W(E)$, которая называется алгеброй Ли специальных дифференцирований алгебры $\mathcal{O}(n\colon \overline{m})$ и обозначается через $W(n\colon \overline{m})$. Если $\operatorname{char} F = p > 2$, то алгебра $W(n\colon \overline{m})$ проста. Полагая $\deg \partial_i = -1$, $\deg x_i = 1$, мы наделяем алгебру $W(E)$ естественной градуировкой: $W(E)_i = \{x^{(\alpha)}\partial_i | \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - 1 = i\}$. Соответствующую естественную фильтрацию обозначим через $\{W_{(i)}\}$.

Наряду с алгебрами $\mathcal{O}(E)$ и $W(E)$ мы также будем рассматривать их пополнения по естественной фильтрации $\widehat{\mathcal{O}}(E)$ и $\widehat{W}(E)$. Это означает, что алгебра

$\widehat{\mathcal{O}}(E)$ состоит из формальных степенных рядов вида $\sum_\alpha a_\alpha x^{(\alpha)}$, а $\widehat{W}(E)$ — свободный $\widehat{\mathcal{O}}(E)$-модуль с базисом $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$.

Согласно [19],[35],[37], справедлив следующий результат.

Предложение 6. *Алгебра $W(n\colon \overline{m})$ является жесткой относительно фильтрованных деформаций.*

Пусть $\Omega^1(E) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(E)}(W(E), \mathcal{O}(E))$ — пространство дифференциальных форм степени 1, тогда через $\Omega^r(E)$ обозначим внешнюю степень $\wedge^r\Omega^1(E)$ над $\mathcal{O}(E)$. Положим $\Omega^0(E) = \mathcal{O}(E)$. Очевидно, что $\Omega^r(E)$ — свободный $\mathcal{O}(E)$-модуль с базисом $\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} | i_1 < \ldots < i_r\}$. Рассмотрим дифференциал $d\colon \mathcal{O}(E) \to \Omega^1(E)\colon f \mapsto df$, где элемент df определяется равенством $(df)(D) = D(f)$ для любого $D \in W(E)$. Дифференциал d естественным образом продолжается до отображений $d\colon \Omega^r(E) \to \Omega^{r+1}(E)$, тем самым задавая на наборе $\Omega^*(E) = \{\Omega^r(E)\}_{r\geqslant 0}$ структуру комплекса. На $\Omega^1(E)$ определено действие $W(E)$ по правилу $D \cdot f dx_i = D(f)dx_i + f d(D(x_i))$, которое очевидным образом продолжается до действия на $\Omega^r(E)$.

Формы из $\Omega^r(E)$ можно рассматривать как элементы из пространства, двойственного пространству $\wedge^r W(E)$, $(\wedge^r W(E))^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(E)}(\wedge^r W(E), \mathcal{O}(E))$, полагая $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_r(D_1, \ldots, D_r) = \det(\varphi_i(D_j))_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ для $\varphi_i \in \Omega^1(E)$ и $D_i \in W(E)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Тогда форме ω степени r и $D \in W(E)$ поставим в соответствие форму $D \lrcorner \omega$ степени $r-1$, определенную условием $(D \lrcorner \omega)(D_1, \ldots, D_{r-1}) = \omega(D, D_1, \ldots, D_r)$, $D_i \in W(E)$.

Наделим $\Omega^r(E)$ структурой градуированного модуля над градуированной алгеброй $\mathcal{O}(E)$, считая, что $\deg dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} = -1$.

Для подалгебры $\mathcal{O}(n\colon \overline{m})$ в $\mathcal{O}(E)$ определим $\mathcal{O}(n\colon \overline{m})$-модули $\Omega^r(n\colon \overline{m}), r \geqslant 0$, как свободные модули с базисом $\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} | i_1 < \ldots < i_r\}$. Тогда $\Omega^0(n\colon \overline{m}) = \mathcal{O}(n\colon \overline{m})$ и $\Omega^1(n\colon \overline{m}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(n\colon \overline{m})}(W(n\colon \overline{m}), \mathcal{O}(n\colon \overline{m}))$. Данный набор модулей вместе с ограничением дифференциала d является подкомплексом комплекса $\Omega^*(E)$, который мы будем обозначать через $\Omega^*(n\colon \overline{m})$.

Введем также комплекс $\widehat{\Omega}^*(E)$ как набор модулей $\widehat{\Omega}^r(E)$ с соответствующим дифференциалом, где $\widehat{\Omega}^r(E)$ — свободный $\widehat{O}(E)$-модуль с базисом $\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} | i_1 < \ldots < i_r\}$.

Кроме алгебры $O(n\colon \overline{m})$ мы также будем рассматривать алгебры вида $O_{h^{-1}}(n\colon \overline{m}) = \{h^{-1}f | f \in O(n\colon \overline{m})\}$ для некоторого обратимого элемента $h \in \widehat{O}(E)$ такого, что $h^{-1}dh \in \Omega^1(n\colon \overline{m})$. При этом мы полагаем, что $W_{h^{-1}}(n\colon \overline{m})$ — свободный $O_{h^{-1}}(n\colon \overline{m})$-модуль с базисом $\{\partial_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ и $\Omega^k_{h^{-1}}(n\colon \overline{m})$ — свободный $O_{h^{-1}}(n\colon \overline{m})$-модуль с базисом $\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n\}$. Сформулируем следующее утверждение из [33], описывающее группы когомологий де Рама при некоторых значениях h.

Предложение 7. *Если элемент h равен либо 1, либо $1 + x^{(\delta)}$, то группы когомологий $H^{n-1}(\Omega_{h^{-1}}(n\colon \overline{m}))$ и $H^1(\Omega_{h^{-1}}(n\colon \overline{m}))$ имеют размерность n и порождены коциклами $x_1^{(p^{m_1}-1)} \ldots \widehat{x_i^{(p^{m_i}-1)}} \ldots x_n^{(p^{m_n}-1)} dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$ и $x_i^{(p^{m_i}-1)} dx_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, соответственно. Если $h = \exp(x_i^{(p^{m_i})})$, то группы $H^{n-1}(\Omega_{h^{-1}}(n\colon \overline{m}))$ и $H^1(\Omega_{h^{-1}}(n\colon \overline{m}))$ тривиальны.*

Определим отображение $\operatorname{div}\colon W(n\colon \overline{m}) \to \widehat{O}(E)$ относительно формы $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \omega(0) \neq 0$, из соотношения $D \cdot \omega = (\operatorname{div} D)\omega$ для D из $W(n\colon \overline{m})$.

Пусть $\omega_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — форма объема. Тогда $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}) = \{D \in W(n : \overline{m}) | \operatorname{div} D = 0\}$ — подалгебра в $W(n\colon \overline{m})$. Коммутант $\widetilde{S}(n\colon \overline{m})^{(1)}$, который мы обозначим через $S(n\colon \overline{m})$, является простой алгеброй Ли размерности $(n-1)(p^{m_1+\ldots+m_n} - 1)$, порожденной элементами $D_{ij}(f) = \partial_i(f)\partial_j - \partial_j(f)\partial_i$, где $f \in O(n\colon \overline{m})$. Кроме того, $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}) = S(n\colon \overline{m}) \oplus \langle x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_k | 1 \leqslant i \neq j \neq k \neq i \leqslant n\rangle$. Алгебра $\widetilde{S}(n\colon \overline{m})$ наделена естественной градуировкой, индуцированной с $W(n\colon \overline{m})$, то есть $\widetilde{S}(n\colon \overline{m})_i = \widetilde{S}(n\colon \overline{m}) \cap W(n\colon \overline{m})_i$. Градуированную алгебру $S'(n\colon \overline{m})$ такую, что $S(n\colon \overline{m}) \subseteq S'(n\colon \overline{m}) \subseteq \widetilde{S}(n\colon \overline{m})$ будем называть специальной алгеброй Ли картановского типа.

Обозначим форму $h\omega_0$ через ω для некоторого обратимого элемента $h \in \widehat{O}(E)$ такого, что $h^{-1}dh \in \Omega^1(n\colon \overline{m})$. Специальная алгебра картановского типа допускает фильтрованные деформации вида $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega) = \{D \in \widehat{W}(n\colon \overline{m}) | D(\omega) = 0\}$. Фильтрованными деформациями являются также подалгебры $S'(n\colon \overline{m}, \omega)$ в $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega)$, удовлетворяющие условию $S(n\colon \overline{m}) \subseteq \operatorname{gr} S'(n\colon \overline{m}, \omega) \subseteq \widetilde{S}(n\colon \overline{m})$. В действительности мы можем ограничиться рассмотрением форм одного из трех типов: $\omega_0, (1 + x^{(\delta)})\omega_0$ и $\exp(x_i^{(p^{m_i})})\omega_0$, где $\delta = (p^{m_1} - 1, \ldots, p^{m_n} - 1)$ и $\exp(x_i^{(p^{m_i})}) = \sum_{k \geqslant 0} (x^{(p^{m_i})})^{(k)}$, так как формы любого другого вида не доставляют новых деформаций. Отметим, что для всех случаев при $n > 2$ алгебра $S(n\colon \overline{m}, \omega) = \widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega)^{(1)}$ проста и порождена элементами вида $D_{ij}(f) = h^{-1}(\partial_i(hf)\partial_j - \partial_j(hf)\partial_i)$, где $f \in O(n\colon \overline{m})$ (см. [27]).

Случай $\omega = \omega_0$ был рассмотрен ранее. Если $\omega = (1 + x^{(\delta)})\omega_0$, то естественная фильтрация $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega)$, индуцированная с алгебры $W(n\colon \overline{m})$, такова, что $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega)_{(i)} \cap W(n\colon \overline{m})_i = S(n\colon \overline{m})_i$ для $i \geqslant 0$ и $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega) = \langle (1 - x^{(\delta)})\partial_i, 1 \leqslant i \leqslant n \rangle \oplus \widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega)_{(0)}$. Кроме того, размерность алгебры $S(m\colon \overline{m}, \omega)$ равна $(n-1)(p^{m_1+\ldots+m_n} - 1)$. Если же $\omega = \exp(x_i^{(p^{m_i})})\omega_0$, то $\widetilde{S}(n\colon \overline{m}, \omega) = S(n\colon \overline{m}, \omega)$ и $\dim S(n\colon \overline{m}, \omega) = (n-1)p^{m_1+\ldots+m_n}$.

Нам понадобятся следующие факты об алгебре Ли специальных дифференцирований $W(n\colon \overline{m})$ и специальной алгебре картановского типа $S(n\colon \overline{m})$ из работы [32].

Предложение 8. *Если $p = 3$, то справедливы изоморфизмы*

1) $W(n\colon \overline{m})_{(2)} / W(n\colon \overline{m})_{(1)}^{(1)} \cong \langle x_j^{(p^s)} \partial_i | 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ 1 \leqslant s < m_j \rangle$,

2) $S(n\colon \overline{m})_{(2)} / S(n\colon \overline{m})_{(1)}^{(1)} \cong \langle D_{ik}(x_j^{(p^s)} x_i) | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n, 1 \leqslant s < m_j \rangle$, где $D_{ij}(f) = \partial_i f \partial_j - \partial_j f \partial_i,\ f \in O(n\colon \overline{m})$.

Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $O(n\colon \overline{m})$, тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \langle x_i^{(p^s)} | 0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant s < m_i \rangle$.

Предложение 9. *Если* $1 + n \not\equiv 0 \mod (p)$*, то* $W(n\colon \overline{m})_0$*-модуль* $W(n\colon \overline{m})_1$ *представим в виде прямой суммы двух неприводимых модулей:*

$$W(n\colon \overline{m})_1 = \langle D \in W(n\colon \overline{m})_1 | \operatorname{div} D = 0\rangle \oplus \langle x_i(x_1\partial_1 + \ldots + x_n\partial_n)\rangle.$$

Предложение 10. $S(n\colon \overline{m})_0$*-модуль* $S(n\colon \overline{m})_1$ *неприводим.*

Структура неприводимых подмодулей в $\Omega^n(n\colon \overline{m})$ и $\Omega^1(n\colon \overline{m})$, описанная в следующих предложениях, известна из [33].

Предложение 11. *В* $W(n\colon \overline{m})$*-модуле* $\Omega^n(n\colon \overline{m})$ *единственным неприводимым* $W(n\colon \overline{m})$*-подмодулем является* $B^n(n\colon \overline{m})$*.*

Предложение 12. *В* $S(n\colon \overline{m})$*-модуле* $\Omega^1(n\colon \overline{m})$ *единственным неприводимым подмодулем является* $d(\operatorname{div} W(n\colon \overline{m}))$*.*

Из [18] и [37] известен следующий результат.

Предложение 13. *Группа* $H^1_{(-1)}(S(n\colon \overline{m}), S(n\colon \overline{m}))$ *порождена коциклом* $\operatorname{ad} x_1\partial_1$ *и коциклами* $\operatorname{ad} x_1^{(p^{m_1}-1)} \ldots \widehat{x_i^{(p^{m_i}-1)}} \ldots x_n^{(p^{m_n}-1)}\partial_i$, $i = 1, \ldots, n$.

В работе [34] определено спаривание между $W(n\colon \overline{m})$ и $\Omega^1(n\colon \overline{m})$ по формуле

$$\langle D, \Theta\rangle = \partial_1^{p^{m_1}-1} \ldots \partial_n^{p^{m_n}-1}(\Theta(D)) \tag{1.1}$$

для всех $D \in W(n\colon \overline{m})$ и $\Theta \in \Omega^1(n\colon \overline{m})$. Оно задает изоморфизм $S(n\colon \overline{m})$-модулей $W(n\colon \overline{m})^*$ и $\Omega^1(n\colon \overline{m})$, который элементу $(x^{(\alpha)}\partial_i)^*$ ставит в соответствие элемент $-(-1)^{|\alpha|}x^{(\delta-\alpha)}dx_i$, где $\delta = (p^{m_1} - 1, \ldots, p^{m_n} - 1)$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Здесь же доказано следующее утверждение.

Предложение 14. *1) Множество* $\{\Theta \in \Omega^1(n\colon \overline{m}) | \langle S(n\colon \overline{m}), \Theta\rangle = 0\}$ *совпадает с* $Z^1(\Omega)(n\colon \overline{m})$*;*

2) множество $\{\Theta \in \Omega^1(n\colon \overline{m}) | \langle \widetilde{S}(n\colon \overline{m}), \Theta\rangle = 0\}$ *совпадает с* $B^1(\Omega)(n\colon \overline{m})$.

И, как следствие, имеет место

Предложение 15. *Спаривание между* $W(n\colon \overline{m})$ *и* $\Omega^1(n\colon \overline{m})$, *определенное формулой* (1.1), *задает изоморфизм* $S(n\colon \overline{m})$*-модулей* $S(n\colon \overline{m})^*$ *и* $B^2(\Omega)(n\colon \overline{m})$.

Пусть теперь $n = 2r+1$. Контактной форме $\Theta = dx_n + \sum_{i=1}^{r}(x_i dx_{i+r} - x_{i+r}dx_i)$ соответствует контактная алгебра Ли $K(n\colon \overline{m}) = \{D \in W(n\colon \overline{m}) | D(\Theta) = g\Theta,\ g \in \mathcal{O}(n\colon \overline{m})\}$. Элементу $f \in \mathcal{O}(n\colon \overline{m})$ взаимно однозначно соответствует элемент $D_f \in K(n\colon \overline{m})$. Наделив алгебру $\mathcal{O}(n\colon \overline{m})$ умножением $[\,,]$ таким, что

$$[f,g] = \Delta(g)\partial_n f - \Delta(f)\partial_n g + \sum_{i=1}^{r}(\partial_i f \partial_{i+r} g - \partial_{i+r} f \partial_i g),\ \Delta(f) = 2f - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \partial_i f,$$

мы можем отождествить $K(n\colon \overline{m})$ и $\mathcal{O}(n\colon \overline{m})$. Определим градуировку алгебры $K(n\colon \overline{m})$, полагая $\deg x_i = 1$, если $1 \leqslant i \leqslant n-1$, и $\deg x_n = 2$. Тогда $K(n\colon \overline{m}) = K_{-2} \oplus K_{-1} \oplus K_0 \oplus \ldots$, где $K_i = \langle x^{(\alpha)} | \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} + 2\alpha_n = i+2\rangle$.

Нам понадобится следующий частный случай из работы [16] о строении автоморфизмов $K(n\colon (1,\ldots,1,m))$.

Предложение 16. *Имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{ad}(K(n\colon (1,\ldots,1,m)))_{(1)} / \operatorname{Lie} \operatorname{Aut}_{(1)}(K(n\colon (1,\ldots,1,m))) \cong \langle x_n^{(p^s)} | 0 < s < m\rangle.$$

Градуированную алгебру Ли $L = \oplus_{i \geqslant -2} L_i$ будем называть алгеброй Ли контактного типа, если

1) $L_{-2} = [L_{-1}, L_{-1}], \dim L_{-2} = 1$,

2) L транзитивна,

3) L_{-1} — неприводимый L_0-модуль,

4) $[L_{-2}, L_1] \neq 0$.

Справедлива следующая теорема (см. [10]).

Теорема 1 (Теорема вложения). *Пусть* $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{(-2)} \supset \mathscr{L}_{(-1)} \supset \mathscr{L}_{(0)} \supset \ldots$ *— фильтрованная деформация градуированной алгебры Ли L контактного типа, причем алгебра L вложена в* $K(n\colon \overline{m})$ *и удовлетворяет следующим условиям:*

1) $L_{-1} = [L_0, v]$ *для некоторого* $v \in L_{-1}$*;*

2) кратность модуля L_{-2} *в* $L_{(1)}/[L_{(1)}, L_{(1)}]$ *не превосходит* $m_1+m_2+\ldots+m_n-n$*;*

3) кратность модуля L_{-1} *в* $L_{(1)}/[L_{(1)}, L_{(1)}]$ *равна нулю.*

Тогда алгебра $\mathscr{L}$ *допускает вложение в фильтрованную алгебру* $K(n\colon \overline{m})$*.*

1.5. Усеченные индуцированные и коиндуцированные модули

Теория усеченных индуцированных и коиндуцированных модулей разработана в [37]. Здесь приводятся основные определения и результаты из [37] в применении к рассматриваемым алгебрам.

Алгебра Ли $\mathscr{L}$ с подалгеброй $\mathscr{L}_{(0)}$ называется транзитивной, если

1) $\mathscr{L}_{(0)}$ совпадает со своим нормализатором $N_{\mathscr{L}}(\mathscr{L}_{(0)})$;

2) $\mathscr{L}_{(0)}$ не содержит нетривиальных идеалов алгебры $\mathscr{L}$.

Подалгебра $\mathscr{L}'$ в $\mathscr{L}$ с отмеченной подалгеброй $\mathscr{L}'_{(0)}$ называется транзитивной, если $\mathscr{L}' + \mathscr{L}_{(0)} = \mathscr{L}$ и $\mathscr{L}' \cap \mathscr{L}_{(0)} = \mathscr{L}'_{(0)}$.

Пусть $A = U(\mathscr{L})$ — универсальная обертывающая алгебра для $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^\sharp = \mathscr{L} + \mathscr{L}^p + \ldots + \mathscr{L}^{p^s} + \ldots$ — универсальная p-оболочка $\mathscr{L}$. Подалгебру с единицей в $U(\mathscr{L})$, порожденную множеством $N_{\mathscr{L}^\sharp}(\mathscr{L}_{(0)})$, обозначим через B. Рассмотрим $\{l_i\}$ — базис в $\mathscr{L}$, причем $\{l_i\}_{i=1}^n$ — базис подпространства, дополнительного к $\mathcal{L}_{(0)}$. Через m_i обозначим $\min\{m | l_i^{p^m} \in \mathcal{L} + \mathcal{L}^p + \ldots + \mathcal{L}^{p^{m-1}} + N_{\mathcal{L}^\sharp}(\mathcal{L}_{(0)})\}$. Тогда мы можем записать $l_i^{p^{m_i}} = h_i + u_i$, где $h_i \in \mathcal{L} + \mathcal{L}^p + \ldots + \mathcal{L}^{p^{m-1}}$, $u_i \in N_{\mathcal{L}^\sharp}(\mathcal{L}_{(0)})$. Положим $\widehat{\mathcal{L}_{(0)}} = \mathcal{L}_{(0)} + \langle u_i | 1 \leqslant i \leqslant n \rangle$. Из [37, Лемма 0.5] известно, что $B = U(\widehat{L_{(0)}})$.

В отдельных случаях элементы u_i можно определить явным образом. В частности, согласно [37, Лемма 0.4], если $L = \oplus_{i=-q}^{r} L_i$, $q < p$, — градуированная транзитивная алгебра Ли, и $\{l_i\}_{i=1}^n$ — однородный базис в $L_- = \oplus_{i<0} L_i$, то $m_i = \min\{m | \operatorname{ad} l_i^{p^m} = 0\}$. Как следствие, имеет место следующее утверждение.

Предложение 17. *В случае, когда $\mathcal{L} = W(n\colon \overline{m})$ или $\mathcal{L} = S(n\colon \overline{m})$, имеем $\widehat{\mathcal{L}_{(0)}} = \mathcal{L}_{(0)} + \langle \partial_i^{p^{m_i}} | 1 \leqslant i \leqslant n \rangle$, где m_i — i-я компонента вектора $\overline{m}$.*

Если $\mathcal{L} = S(n\colon \overline{m}, \omega)$, где $\omega = (1 + x^{(\delta)})\omega_0$, то, согласно [1, Lemma 4.5], найдутся такие элементы $D_1, \ldots, D_n$ из подпространства, дополнительного к $\mathcal{L}_{(0)}$, что $\operatorname{ad} D_i^{p^{m_i}} = \operatorname{ad} D_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1, \operatorname{ad} D_n^{p^{m_n}} = \operatorname{ad} D_1$, а именно,

$$
\begin{aligned}
D_1 &= (1 - x^{(\delta)})\partial_1 - x_1^{(p^{m_1}-1)}\partial_2 - \ldots - x_1^{(p^{m_1}-1)} \ldots x_{n-1}^{(p^{m_{n-1}}-1)}\partial_n,\\
D_i &= (1 - x^{(\delta)})\partial_i + x_i^{(p^{m_i}-1)}\partial_{i+1} + \ldots + x_i^{(p^{m_i}-1)} \ldots x_{n-1}^{(p^{m_{n-1}}-1)}\partial_n +\\
&\quad + x_i^{(p^{m_i}-1)} \ldots x_n^{(p^{m_n}-1)}\partial_1 - \ldots - x_i^{(p^{m_i}-1)} \ldots x_n^{(p^{m_n}-1)} x_1^{(p^{m_1}-1)} \ldots x_{i-2}^{(p^{m_{i-2}}-1)}\partial_{i-1}.
\end{aligned}
$$

В результате справедливо следующее предложение.

Предложение 18. *Если $\mathcal{L} = S(n\colon \overline{m}, \omega)$, где $\omega = (1 + x^{(\delta)})\omega_0$, то $\widehat{\mathcal{L}_{(0)}} = \mathcal{L}_{(0)} + \langle u_i | 1 \leqslant i \leqslant n \rangle$, где $u_i = D_i^{p^{m_i}} - D_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n-1, u_n = D_n^{p^{m_n}} - D_1$. Элементы u_i лежат в центре универсальной обертывающей алгебры для $\mathcal{L}$.*

Пусть V — левый B-модуль, тогда A-модули $\overline{\operatorname{coind}} V = \operatorname{Hom}_B(A, V)$ и $\overline{\operatorname{ind}} V = A \otimes_B V$ называются усеченным коиндуцированным и усеченным индуцированным модулями над транзитивной алгеброй $\mathcal{L}$, соответственно. Структура A-модуля на $\overline{\operatorname{coind}} V$ и $\overline{\operatorname{ind}} V$ задана следующим образом: $(a \cdot f)(x) = f(xa)$ и $a \cdot (x \otimes v) = ax \otimes v$ для всех $a, x \in A$, $f \in \overline{\operatorname{coind}} V$, $v \in V$. Отображения $\iota\colon \overline{\operatorname{coind}} V \to V\colon f \mapsto f(1)$ и $\kappa\colon V \to \overline{\operatorname{ind}} V\colon v \mapsto 1 \otimes v$ являются гомоморфизмами B-модулей.

Предложение 19. *Пусть* $\mathscr{L}$ *— транзитивная подалгебра в* $W(n : \overline{m})$ *и* V *— конечномерный* $\mathcal{O}(n\colon \overline{m})$*-модуль, на котором алгебра* $\mathscr{L}$ *действует специальными дифференцированиями, то есть*

$$l \cdot (fv) = l \cdot (f)v + fl \cdot (v), \quad l \in \mathscr{L}, f \in \mathcal{O}(n : \overline{m}), v \in V.$$

Пусть $\mathfrak{m}$ *— максимальный идеал в* $\mathcal{O}(n : \overline{m})$*, тогда* $V \cong \overline{\mathrm{coind}}(V/\mathfrak{m}V)$ *(см. [37, Теор. 2.1]).*

В частности, если $\mathscr{L} = W(n\colon \overline{m})$ или $S(n\colon \overline{m})$, а $V = \Omega^k$, то все условия предложения 19 выполнены, и $\Omega^k = \overline{\mathrm{coind}}(\Omega^k/\mathfrak{m}\Omega^k)$ — усеченный коиндуцированный модуль над $\mathscr{L}$. Известно ([37, Предл. 0.6]), что $(\overline{\mathrm{ind}}\,V)^* \cong \overline{\mathrm{coind}}\,V^*$, поэтому модуль Ω^k является также усеченным индуцированным модулем.

Предложение 20. *Пусть* $\mathscr{L}$ *— любая из алгебр* $W(n\colon \overline{m})$ *или* $S(n\colon \overline{m})$*. Тогда для любого* $\widehat{\mathscr{L}_{(0)}}$*-модуля* V *такого, что* $\partial_i^{m_i} V = 0$*, имеет место сохраняющий градуировку изоморфизм*

$$H^s(\mathscr{L}, \overline{\mathrm{coind}}\,V) = \oplus_{i=0}^{s} H^i(\Omega) \otimes_F H^{s-i}(\mathscr{L}_{(0)}, V), \ s \geqslant 0,$$

где $H^i(\Omega)$ *— группа когомологий де Рама (см. [37, Теор. 3.1]).*

Усеченные коиндуцированные модули обладают свойством универсальности. Для A-модуля M, B-модуля V и морфизма B-модулей $\pi\colon M \to V$ существует единственный морфизм A-модулей $\varphi\colon M \to \overline{\mathrm{coind}}\,V$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{coind}}\,V \arrow[r, "\iota"] & V \\
M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Аналогичным свойством универсальности обладают и индуцированные модули. Для A-модуля M, B-модуля V и морфизма B-модулей $\iota\colon V \to M$ существует единственный морфизм A-модулей $\psi\colon \overline{\operatorname{ind}}\, V \to M$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\iota"'] & \overline{\operatorname{ind}}\, V. \arrow[dl, "\psi"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Глава 2

Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Франк

2.1. Геометрическая реализация алгебр Франк

Пусть $\mathcal{O} = \mathcal{O}(1\colon m)$ — алгебра разделенных степеней от одной переменной, $W = W(1\colon m)$ — алгебра специальных дифференцирований алгебры $\mathcal{O}$, $\Omega^1 = \Omega^1(1\colon m)$ — пространство дифференциальных форм степени 1, U — векторное пространство размерности 2. Зафиксируем на U кососимметрическую невырожденную билинейную форму $\langle\, ,\, \rangle$. Для каждой пары $u, u' \in U$ определим линейный оператор $T_{uu'} \in \mathfrak{sl}(U)$, полагая

$$T_{uu'}(v) = \langle u, v\rangle u' + \langle u', v\rangle u \text{ для всех } v \in U.$$

На векторном пространстве $T(m) = T_{\bar{0}} \oplus T_{\bar{1}}$, где $T_{\bar{0}} = W \oplus (\mathfrak{sl}(U) \otimes \mathcal{O})$ и $T_{\bar{1}} = U \otimes \Omega^1$, зададим структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Ли по формулам:

1) $[\, ,\,] : T_{\bar{0}} \times T_{\bar{0}} \longrightarrow T_{\bar{0}}$:

$$[f_1\partial + G_1 \otimes h_1, f_2\partial + G_2 \otimes h_2] = [f_1\partial, f_2\partial] + G_2 \otimes f_1\partial h_2 - G_1 \otimes f_2\partial h_1 + [G_1, G_2] \otimes h_1 h_2,$$

где $f_1\partial, f_2\partial \in W$, $h_1, h_2 \in \mathcal{O}$, $G_1, G_2 \in \mathfrak{sl}(U)$.

2) $[\, ,\,] : T_{\bar{0}} \times T_{\bar{1}} \longrightarrow T_{\bar{1}}$:

$$[f\partial + G \otimes h, u \otimes g dx] = u \otimes \partial(fg) dx + G(u) \otimes hg dx,$$

где $f\partial \in W$, $g dx \in \Omega^1$, $h \in \mathcal{O}$, $u \in U$, $G \in \mathfrak{sl}(U)$.

3) $[\, ,\,] : T_{\bar{1}} \times T_{\bar{1}} \longrightarrow T_{\bar{0}}$:

$$[u_1 \otimes f dx, u_2 \otimes h dx] = \langle u_1, u_2\rangle f h\partial + T_{u_1 u_2} \otimes (f\partial h - h\partial f),$$

где $u_1, u_2 \in U$, $f dx, h dx \in \Omega^1$.

Построенное выше однопараметрическое семейство алгебр Ли $T = T(m)$ называется серией алгебр Франк.

Мы будем рассматривать $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры T глубины 2, $T = T_{-2} \oplus \oplus T_{-1} \oplus T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots$, где

$$T_{2i} = \langle x^{(i+1)}\partial,\ E \otimes x^{(i)},\ F \otimes x^{(i)},\ H \otimes x^{(i)} \rangle,\ i \geqslant -1,\ x^{(-1)} = 0,$$
$$T_{2i+1} = \langle e_1 \otimes x^{(i+1)} dx,\ e_2 \otimes x^{(i+1)} dx \rangle,\ i \geqslant -1.$$

Здесь e_1, e_2 — симплектический базис пространства U, а E, F, H — стандартный базис $\mathfrak{sl}(U)$.

Согласно [4], алгебра T допускает вложение в контактную алгебру $\mathcal{K} = = \mathcal{K}(3\colon (1, 1, m))$, а значит, является алгеброй контактного типа. Однородные подпространства, соответствующие данному вложению, имеют вид:

$$T_{-2} = \mathcal{K}_{-2} = \langle 1 \rangle_F,$$
$$T_{-1} = \mathcal{K}_{-1} = \langle x_1, x_2 \rangle_F,$$
$$T_0 = \mathcal{K}_0 = \langle x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_1x_2, x_3 \rangle_F,$$
$$T_{2i} = \langle x_1^{(2)}x_3^{(i)},\ x_2^{(2)}x_3^{(i)},\ x_1x_2x_3^{(i)},\ x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(i-1)} - x_3^{(i+1)} \rangle_F,\ i > 0,$$
$$T_{2i-1} = \langle x_1^{(2)}x_2x_3^{(i-1)} - x_1x_3^{(i)},\ x_1x_2^{(2)}x_3^{(i-1)} - x_2x_3^{(i)} \rangle_F,\ i > 0.$$

Таким образом, на алгебре $\mathcal{K}$ задана структура T-модуля, поэтому корректно определен T-модуль $\mathcal{K}/T$, где действие задано правилом: $g \cdot \overline{f} = \overline{[g, f]}$ для $g \in T$, $\overline{f} \in \mathcal{K}/T$. Под $\overline{f}$ следует понимать образ элемента $f \in \mathcal{K}$ при канонической проекции $\mathcal{K} \to \mathcal{K}/T$. Модуль $\mathcal{K}/T$ наделен $\mathbb{Z}$-градуировкой, индуцированной с градуировки на $\mathcal{K}$:

$$(\mathcal{K}/T)_{2i+2} = \langle \overline{x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(i)}} \rangle_F,$$
$$(\mathcal{K}/T)_{2i+1} = \langle \overline{x_1^{(2)}x_2x_3^{(i)}}, \overline{x_1x_2^{(2)}x_3^{(i)}} \rangle_F$$

для всех $0 \leqslant i \leqslant 3^m - 1$.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство модуля $\mathcal{K}/T$.

Лемма 1. *Градуированный T-модуль $\mathcal{K}/T$ транзитивен.*

Доказательство. По определению транзитивного модуля, для произвольного ненулевого элемента $\overline{f} \in (\mathcal{K}/T)_i$, $i > 1$, должно выполняться условие $T_{-1} \cdot \overline{f} \neq 0$.

Пусть $f = x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(i)}$, тогда для элемента x_1 из T_{-1} имеем

$$[x_1, f] = \Delta(f)\partial_3(x_1) - \Delta(x_1)\partial_3(f) + \partial_1(x_1)\partial_2(f) - \partial_2(x_1)\partial_1(f) =$$
$$= -x_1\partial_3(f) + \partial_2(f) = -x_1 x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(i-1)} + x_1^{(2)} x_2 x_3^{(i)} = x_1^{(2)} x_2 x_3^{(i)}.$$

Поэтому $x_1 \cdot \overline{f} = \overline{x_1^{(2)} x_2 x_3^{(i)}} \neq 0$, а значит, $T_{-1} \cdot \overline{f} \neq 0$.

Пусть $f = \alpha x_1^{(2)} x_2 x_3^{(i)} + \beta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(i)}$. Тогда

$$[x_1, f] = \Delta(f)\partial_3(x_1) - \Delta(x_1)\partial_3(f) + \partial_1(x_1)\partial_2(f) - \partial_2(x_1)\partial_1(f) =$$
$$= -x_1\partial_3(f) + \partial_2(f) = -x_1(\alpha x_1^{(2)} x_2 x_3^{(i-1)} + \beta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(i-1)}) +$$
$$+ \alpha x_1^{(2)} x_3^{(i)} + \beta x_1 x_2 x_3^{(i)} = \beta x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(i-1)} + \alpha x_1^{(2)} x_3^{(i)} + \beta x_1 x_2 x_3^{(i)}.$$

Аналогично,

$$[x_2, f] = \Delta(f)\partial_3(x_2) - \Delta(x_2)\partial_3(f) + \partial_1(x_2)\partial_2(f) - \partial_2(x_2)\partial_1(f) =$$
$$= -x_2\partial_3(f) - \partial_1(f) = -x_2(\alpha x_1^{(2)} x_2 x_3^{(i-1)} + \beta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(i-1)}) -$$
$$- \alpha x_1 x_2 x_3^{(i)} - \beta x_2^{(2)} x_3^{(i)} = \alpha x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(i-1)} - \alpha x_1 x_2 x_3^{(i)} - \beta x_2^{(2)} x_3^{(i)}.$$

Следовательно, $x_1 \cdot \overline{f} = \beta \overline{x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(i-1)}}$ и $x_2 \cdot \overline{f} = \alpha \overline{x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(i-1)}}$. Таким образом, $T_{-1} \cdot \overline{f} = 0$ только если $\alpha = \beta = 0$, то есть когда $\overline{f} = 0$. Утверждение доказано.■

2.2. Вложение фильтрованных деформаций в контактную алгебру

Докажем, что все фильтрованные деформации допускают вложение в контактную алгебру $\mathcal{K}$. Тогда их исследование сведется к описанию фильтрованных деформаций алгебры T внутри алгебры $\mathcal{K}$.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Имеет место изоморфизм T_0-модулей*

$$T_{(1)}/[T_{(1)},T_{(1)}] \cong T_1 + \langle E\otimes x,\ F\otimes x,\ H\otimes x\rangle + \langle x^{(p^t)}\partial | 0 < t < m\rangle.$$

Доказательство. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что коммутант $[T_{(1)},T_{(1)}]$ не содержит в точности элементы $E\otimes x$, $F\otimes x$, $H\otimes x$ и $x^{(p^t)}\partial$, $t>0$, из стандартного базиса пространства $T_{(2)}$. Напомним, что подалгебра $T_{(1)}$ как векторное пространство порождена элементами $x^{(i+2)}\partial$, $G\otimes x^{(i+1)}$, $u\otimes x^{(i+1)}dx$ для $i\geqslant 0$, где $G\in\mathfrak{sl}(U)$, $u\in U$.

Из равенства $[x^{(i+2)}\partial, G\otimes x] = G\otimes x^{(i+2)}$ для произвольного $G\in\mathfrak{sl}(U)$ следует, что $[T_{(1)},T_{(1)}]$ содержит все элементы вида $G\otimes x^{(j)}$ для $j>1$. Сравнивая степени элементов, мы заключаем, что получить элементы вида $G\otimes x$ можно только из скобки

$$[u\otimes x^{(i+1)}dx, u'\otimes x^{(j+1)}dx] = \\ = \langle u,u'\rangle x^{(i+1)}x^{(j+1)}\partial + T_{uu'}\otimes (x^{(i+1)}x^{(j)} - x^{(j+1)}x^{(i)}) \quad (2.1)$$

при $i=j=0$. Однако, $[u\otimes xdx, u'\otimes xdx] = -\langle u,u'\rangle x^{(2)}\partial$, что также не дает нам указанные элементы, но при подходящем выборе $u,u'\in U$ мы получаем элемент $x^{(2)}\partial$ в $[T_{(1)},T_{(1)}]$. Отметим также, что скобка (2.1) не дает нам элементы вида $x^{(p^t)}\partial$.

Так как предложение 8 утверждает, что W_0-модуль $W_{(1)}/[W_{(1)},W_{(1)}]$ изоморфен $W_1 + \langle x^{(p^t)}\partial | 0<t<m\rangle$ и, кроме того, $[W_{(1)},W_{(1)}]\subset[T_{(1)},T_{(1)}]$, то $[T_{(1)},T_{(1)}]$ не содержит элементов $x^{(p^t)}\partial$, поскольку единственный альтернативный способ получить такие элементы доставляет (2.1), который мы уже рассмотрели.

Далее, скобка $[H\otimes x^{(i+1)}, e_k\otimes x^{(j+1)}dx]$ с точностью до знака равна $e_k\otimes x^{(i+1)}x^{(j+1)}dx$, и отлична от нуля в случае, когда $i+j+2$ не является степенью

p. В противном случае пусть $i+2$ — некоторая степень p. Рассмотрим произведение $[x^{(i+2)}\partial, e_k \otimes xdx] = e_k \otimes x^{(i+1)}xdx + e_k \otimes x^{(i+2)}dx$, первое слагаемое которого, очевидно, тривиально. Таким образом, $[T_{(1)}, T_{(1)}]$ содержит все элементы вида $e_k \otimes x^{(j)}dx$ для $j > 1$.

Итак, рассмотрев возможные варианты умножения элементов из $T_{(1)}$, мы можем заключить, что

$$T_{(1)}/[T_{(1)}, T_{(1)}] = T_1 + \langle E \otimes x,\ F \otimes x,\ H \otimes x\rangle + \langle x^{(p^t)}\partial | 0 < t < m\rangle.$$

Что и требовалось доказать. ■

Достаточным условием вложения фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ алгебры Ли T в контактную алгебру является теорема 1.

Лемма 3. *Для произвольной фильтрованной деформации алгебры T выполнены условия теоремы вложения в контактную алгебру $\mathcal{K}$, то есть*

1) *для некоторого $v \in T_{-1}$ имеем $T_{-1} = [T_0, v]$;*

2) *кратность T_0-модуля T_{-2} в $T_{(1)}/T_{(1)}^{(1)}$ не превосходит $m-1$;*

3) *кратность T_0-модуля T_{-1} в $T_{(1)}/T_{(1)}^{(1)}$ равна нулю.*

Доказательство. Проверим, что выполнено каждое из вышеперечисленных условий.

1) Действительно, выберем в качестве v элемент $e_1 \otimes dx$, тогда для $F \otimes 1, H \otimes 1 \in \in T_0$ справедливы формулы

$$[F \otimes 1, e_1 \otimes dx] = F(e_1) \otimes dx = e_2 \otimes dx;$$
$$[-H \otimes 1, e_1 \otimes dx] = -H(e_1) \otimes dx = e_1 \otimes dx,$$

из которых следует требуемое утверждение.

2) Из леммы 2 видно, что $T_{(1)}/[T_{(1)}, T_{(1)}]$ содержит ровно $m-1$ одномерных T_0-подмодулей вида $\langle x^{(p^t)}\partial\rangle_F$. Следовательно, данное условие также выполнено.

3) Заметим, что T_{-1} — двумерный неприводимый T_0-модуль. Из леммы 2 следует, что в $T_{(1)}/[T_{(1)}, T_{(1)}]$ существует единственный неприводимый двумерный T_0-подмодуль, изоморфный T_1. Модули T_{-1} и T_1 неизоморфны, так как $x\partial \in T_0$ действует на T_1 с собственным значением -1, а на T_{-1} с собственным значением 1:

$$[x\partial, u \otimes xdx] = -u \otimes xdx, \;\; [x\partial, u \otimes dx] = u \otimes dx.$$

Поэтому $T_{(1)}/T_{(1)}^{(1)}$ не содержит подмодулей, изоморфных T_{-1}.

Таким образом, выполнены все требования теоремы вложения. ■

2.3. Исследование фильтрованных деформаций алгебр Франк внутри контактной алгебры

Как было отмечено в предложении 4, локальные фильтрованные деформации алгебры Ли L внутри M описываются группой $H^1_{\mathrm{loc}}(L, M/L)$. Из п. 2.2, таким образом, вытекает, что описание фильтрованных деформаций T можно свести к вычислению группы $H^1_{\mathrm{loc}}(T, \mathcal{K}/T)$. Как утверждалось ранее в предложении 5, следующая лемма обеспечивает равенство групп $H^1_{\mathrm{loc}}(T, \mathcal{K}/T)$ и $H^1_{+}(T, \mathcal{K}/T)$.

Лемма 4. *Выполнено равенство* $\mathrm{Lie\ Aut}_{(1)}\,\mathcal{K} + \oplus_{i>0}(N_{\mathrm{Der}\mathcal{K}}T)_i = \mathrm{ad}\,\mathcal{K}_{(1)}$.

Доказательство. Из предложения 16 следует, что фактор $\mathrm{ad}\,\mathcal{K}_{(1)}/\,\mathrm{Lie\ Aut}_{(1)}\,\mathcal{K}$ порождается элементами $x_3^{(p^s)}$. Поэтому элементы из $\mathrm{ad}\,\mathcal{K}_{(1)}$ либо содержатся в $\mathrm{Lie\ Aut}_{(1)}\,\mathcal{K}$, либо имеют вид $x_3^{(p^s)} + l$, $l \in \mathrm{Lie\ Aut}_{(1)}\,\mathcal{K}$. Заметим, что из описания вложения алгебры T в $\mathcal{K}$ следует, что элементы $x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(i-1)} - x_3^{(i+1)}$ содержатся в T. Тогда, поскольку $\oplus_{i>0}(N_{\mathrm{Der}\,\mathcal{K}}T)_i = \mathrm{ad}\,T_{(1)}$, получаем включение $\mathrm{Lie\ Aut}_{(1)}\,\mathcal{K} + \oplus_{i>0}(N_{\mathrm{Der}\,\mathcal{K}}T)_i \supseteq \mathrm{ad}\,\mathcal{K}_{(1)}$. Включение в обратную сторону очевидно. Таким образом, лемма доказана. ■

Вычислим группу $H^1_+(T, \mathcal{K}/T)$. Заметим, что $H^1_j(T, \mathcal{K}/T) = 0$, если $j \not\equiv 0 \mod (p)$. Действительно, элемент $x_3 \in T_0 = \mathcal{K}_0$ действует на однородные пространства $\mathcal{K}_i$ умножением на $-i$, а значит, на $H^1_j(T, \mathcal{K}/T)$ – умножением на $-j$. Так как действие T на $H^1(T, \mathcal{K}/T)$ тривиально, то $H^1_j(T, \mathcal{K}/T)$ может быть отличным от нуля лишь когда $j \equiv 0 \mod (p)$. По лемме 1 модуль $\mathcal{K}/T$ транзитивен, поэтому мы можем применить предложение 2, из которого следует вложение $H^1_+(T, \mathcal{K}/T)$ в пространство когомологий Спенсера $\oplus_{j>0}H^{j,1}(T, \mathcal{K}/T)$. Поскольку данное вложение получено ограничением коциклов с T на $T_- = T_{-2} + T_{-1}$, то оно сохраняет градуировку. Таким образом, достаточно вычислить группы $H^{j,1}(T, \mathcal{K}/T)$, где $j \equiv 0 \mod (p)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Группы когомологий Спенсера $H^{j,1}(T, \mathcal{K}/T)$ для $j \equiv 0 \mod (p)$ тривиальны.*

Доказательство. Поскольку мы требуем, чтобы $j \equiv 0 \mod (p)$, то доказательство разбивается на два случая: $j = 6l$ и $j = 6l + 3$.

В первом случае имеем комплекс

$$C^{6l+1,0}(T, \mathcal{K}/T) \longrightarrow C^{6l,1}(T, \mathcal{K}/T) \longrightarrow C^{6l-1,2}(T, \mathcal{K}/T) \longrightarrow \dots.$$

Для ненулевого отображения $c \in C^{6l,1}(T, \mathcal{K}/T)$ элементы $c(x_1)$, $c(x_2)$ лежат в пространстве $(\mathcal{K}/T)_{2(3l-1)+1}$, а $c(1) \in (\mathcal{K}/T)_{2(3l-1)+2}$. То есть

$$\begin{aligned} c(x_1) &= \alpha x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-1)} + \beta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)}, \\ c(x_2) &= \gamma x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-1)} + \delta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)}, \\ c(1) &= \varepsilon x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)}. \end{aligned}$$

Предположим, что c — коцикл, тогда

$$\begin{aligned} \delta c(x_1, 1) &= [x_1, c(1)] - [1, c(x_1)] - c([x_1, 1]) = \\ &= [x_1, \varepsilon x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)}] - [1, \alpha x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-1)} + \beta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)}] = \\ &= \varepsilon x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-2)} - \alpha x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-2)} - \beta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\beta = \alpha - \varepsilon = 0$. Далее,

$$\begin{aligned} \delta c(x_2, 1) &= [x_2, c(1)] - [1, c(x_2)] - c([x_2, 1]) = \\ &= [x_2, \varepsilon x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)}] - [1, \gamma x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-1)} + \delta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)}] = \\ &= -\varepsilon x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)} - \gamma x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-2)} - \delta x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\gamma = \delta + \varepsilon = 0$. Наконец, учитывая уже полученные соотношения на коэффициенты, убеждаемся, что последнее соотношение является тождеством:

$$\begin{aligned} \delta c(x_1, x_2) &= [x_1, c(x_2)] - [x_2, c(x_1)] - c([x_1, x_2]) = [x_1, -\varepsilon x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)}] - \\ &- [x_2, \varepsilon x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-1)}] - \varepsilon x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)} = -\varepsilon x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)} - \varepsilon x_1 x_2 x_3^{(3l-1)} - \\ &- \varepsilon x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)} + \varepsilon x_1 x_2 x_3^{(3l-1)} - \varepsilon x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, коцикл имеет вид $c = \alpha(x_1^* \otimes x_1^{(2)} x_2 x_3^{(3l-1)} - x_2^* \otimes x_1 x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)} + 1^* \otimes x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-2)})$. В случае, когда $C^{6l+1,0}(T, \mathcal{K}/T) \neq 0$, проверим, что c является кограницей: $c = \delta(\alpha x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)})$, вычислив значения $\delta(\alpha x_1^{(2)} x_2^{(2)} x_3^{(3l-1)})$ на элементах $1, x_1, x_2$:

$$\delta(\alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)})(1) = [1, \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)}] = \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-2)},$$

$$\delta(\alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)})(x_1) = [x_1, \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)}] =$$
$$= -x_1 \cdot \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-2)} + \alpha x_1^{(2)}x_2x_3^{(3l-1)} = \alpha x_1^{(2)}x_2x_3^{(3l-1)},$$

$$\delta(\alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)})(x_2) = [x_2, \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)}] =$$
$$= -x_2 \cdot \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-2)} - \alpha x_1x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)} = -\alpha x_1x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)}.$$

Если же $C^{6l+1,0}(T, \mathcal{K}/T) = 0$, то $(\mathcal{K}/T)_{6l} = 0$, поэтому $6l > 2 \cdot 3^m$, откуда $C^{6l,1}(T, \mathcal{K}/T) = 0$.

Второй случай получаем, рассматривая комплекс

$$C^{6l+4,0}(T, \mathcal{K}/T) \longrightarrow C^{6l+3,1}(T, \mathcal{K}/T) \longrightarrow C^{6l+2,2}(T, \mathcal{K}/T) \longrightarrow \dots .$$

Ненулевое отображение $c \in C^{6l+3,1}(T, \mathcal{K}/T)$ в общем случае имеет вид

$$c = \alpha x_1^* \otimes x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l)} + \beta x_2^* \otimes x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l)} + \gamma 1^* \otimes x_1^{(2)}x_2x_3^{(3l)} + \varepsilon 1^* \otimes x_1x_2^{(2)}x_3^{(3l)}.$$

Если c — коцикл, то мы получаем следующие соотношения на коэффициенты:

$$\delta c(x_1, 1) = [x_1, c(1)] - [1, c(x_1)] - c([x_1, 1]) =$$
$$= [x_1, \gamma x_1^{(2)}x_2x_3^{(3l)} + \varepsilon x_1x_2^{(2)}x_3^{(3l)}] - [1, \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l)}] =$$
$$= \gamma x_1^{(2)}x_3^{(3l)} + \varepsilon x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)} + \varepsilon x_1x_2x_3^{(3l)} - \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)} = 0,$$

где $x_3^{(-1)} = 0$. Откуда $\gamma = \varepsilon = \varepsilon - \alpha = 0$, если $l > 0$ и $\gamma = \varepsilon = 0$, если $l = 0$. Кроме того,

$$\delta c(x_2, 1) = [x_2, c(1)] - [1, c(x_2)] - c([x_1, 1]) =$$
$$= -[1, \beta x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l)}] = -\beta x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l-1)} = 0,$$

при $l > 0$ имеем $\beta = 0$. Вычисляя значения δc на элементах x_1, x_2, получаем

$$\delta c(x_1, x_2) = [x_1, c(x_2)] - [x_2, c(x_1)] - c([x_1, x_2]) =$$
$$= [x_1, \beta x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l)}] - [x_2, \alpha x_1^{(2)}x_2^{(2)}x_3^{(3l)}] = \beta x_1^{(2)}x_2x_3^{(3l)} + \alpha x_1x_2^{(2)}x_3^{(3l)} = 0,$$

то есть $\alpha = \beta = 0$. Поэтому $c = 0$. Таким образом, в каждом из случаев $H^{j,1}(T, \mathcal{K}/T) = 0$, что доказывает лемму. ■

Как отмечалось выше, из леммы 5 следует тривиальность когомологической группы $H^1_+(T, \mathcal{K}/T)$, поэтому T не имеет нетривиальных деформаций внутри $\mathcal{K}$, а так как все фильтрованные деформации алгебры T можно вложить в $\mathcal{K}$, то справедлива

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры Ли T, тогда $\mathscr{L} \cong T$.*

Глава 3

Фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathscr{R}$

Для пары натуральных чисел $\overline{m} = (m_1, m_2)$ положим $O = O(2\colon \overline{m})$ — алгебра разделенных степеней от двух переменных, $W = W(2\colon \overline{m})$ — алгебра специальных дифференцирований O, $\Omega^2 = \Omega^2(2\colon \overline{m})$ — пространство дифференциальных форм степени 2. На пространствах $R(\overline{m}) = R_{\overline{0}} \oplus R_{\overline{1}}$ и $\widetilde{R}(\overline{m}) = \widetilde{R}_{\overline{0}} \oplus \widetilde{R}_{\overline{1}}$, где $R_{\overline{0}} = \widetilde{R}_{\overline{0}} = W$, $R_{\overline{1}} = B^2(\Omega)$, $\widetilde{R}_{\overline{1}} = \Omega^2$, определим структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр Ли. Обозначим форму $dx_1 \wedge dx_2$ через ω. Стандартное действие W на себе и на модуле Ω^2, а также формула

$$[f\omega, g\omega] = (f\partial_2 g - g\partial_2 f)\partial_1 - (f\partial_1 g - g\partial_1 f)\partial_2,$$

где $f\omega, g\omega \in \Omega^2$, задают операции умножения на $R(\overline{m})$ и $\widetilde{R}(\overline{m})$. Отметим, что коммутант $\widetilde{R}(\overline{m})^{(1)} = R(\overline{m})$ — простая алгебра Ли. Алгеброй Ли серии $\mathscr{R}$ будем называть любую из алгебр $R(\overline{m})$ или $\widetilde{R}(\overline{m})$. Через L будем обозначать алгебру Ли серии $\mathscr{R}$, через $L_{\overline{0}}$ и $L_{\overline{1}}$ — ее однородные пространства $\mathbb{Z}_2$-градуировки.

Алгебра L наделена также $\mathbb{Z}$-градуировкой глубины 1, $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus \oplus L_2 \oplus \ldots$, где

$$L_i = \langle x^{(\alpha)}\partial_1, x^{(\alpha)}\partial_2, x^{(\alpha)}\omega \in L :\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = i + 1\rangle.$$

3.1. Вычисление группы $H^2_+(W, B^2(\Omega))$

При дальнейших рассуждениях нам потребуется следующее предложение.

Предложение 21. *Группа $H^2_+(W, L_{\overline{1}})$ тривиальна.*

Доказательство. В зависимости от алгебры модуль $L_{\overline{1}}$ равен либо Ω^2, либо $B^2(\Omega)$. Вычислим сначала $H^2_+(W, \Omega^2)$. Напомним, что $\Omega^2 = \overline{\mathrm{coind}}(\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2)$ —

усеченный коиндуцированный модуль, поэтому, согласно предложению 20, группа когомологий $H^2(W, \Omega^2)$ изоморфна

$$H^0(\Omega) \otimes H^2(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) + H^1(\Omega) \otimes H^1(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) + \\ + H^2(\Omega) \otimes H^0(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2), \quad (3.1)$$

где $H^i(\Omega)$ — когомологии де Рама, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в алгебре $\mathcal{O}$. Покажем, что в формуле (3.1) два последних слагаемых равны нулю. Более точно, $H^1(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = H^0(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0$.

Через z обозначим элемент $x_1\partial_1 + x_2\partial_2$ из центра универсальной обертывающей алгебры для W, через M — модуль $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$. Так как z действует на M с собственным значением -1, то $H^0(W_{(0)}, M) = \{m \in M | W_{(0)}m = 0\} = \{0\}$.

Для вычисления $H^1(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2)$ применим спектральную последовательность Серра-Хохшильда $\{E_r^{p,q}\}$ для алгебры $W_{(0)}$, идеала $W_{(1)}$ и модуля M. Тогда

$$E_2^{1,0} = H^1(W_{(0)}/W_{(1)}, H^0(W_{(1)}, M)) = H^1(W_0, H^0(W_{(1)}, M)),$$
$$E_2^{0,1} = H^0(W_{(0)}/W_{(1)}, H^1(W_{(1)}, M)) = H^0(W_0, H^1(W_{(1)}, M)).$$

Поскольку $W_{(1)}$ действует на M тривиально, то $H^0(W_{(1)}, M) = M$ и $E_2^{1,0} = $ $= H^1(W_0, M)$. Как было замечено ранее, действие $z \in W_0$ на M не является тривиальным, а следовательно (см. предложение 1), $H^1(W_0, M) = 0$. Итак, мы показали, что $E_2^{1,0} = 0$.

Вычислим $E_2^{0,1} = H^0(W_0, H^1(W_{(1)}, M))$. В силу тривиальности $W_{(1)}$- модуля M, $H^1(W_{(1)}, M) \cong (W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}])^* \otimes M$. Так как, согласно предложению 8, $W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}] \cong W_1 + W_2' + W_8' + \ldots + W_{3^k-1}' + \ldots$, где $W_{3^k-1}' = \langle x_i^{(3^k)}\partial_j | 1 \leqslant i, j \leqslant$ $\leqslant 2\rangle \subset W_{3^k-1}$, то $H^1(W_{(1)}, M) \cong W_1^* \otimes M + \oplus_{k>0} W_{3^k-1}'^* \otimes M$. Таким образом,

$$E_2^{0,1} \cong H^0(W_0, W_1^* \otimes M) + \oplus_{k>0} H^0(W_0, W_{3^k-1}'^* \otimes M). \quad (3.2)$$

Элемент z действует на $W_1^* \otimes M$ тождественно, поэтому $H^0(W_0, W_1^* \otimes M) = 0$. Заметим, что $W'^*_{3^k-1} \otimes M$ и $\mathrm{Hom}_F(W'_{3^k-1}, M)$ изоморфны как модули над F, откуда $H^0(W_0, W'^*_{3^k-1} \otimes M) \cong H^0(W_0, \mathrm{Hom}_F(W'_{3^k-1}, M))$. По свойству нулевой группы когомологий, $H^0(W_0, \mathrm{Hom}_F(W'_{3^k-1}, M)) = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_F(W'_{3^k-1}, M) | [D, \varphi(D')] - \varphi([D, D']) = 0\ \forall D \in W, D' \in W'_{3^k-1}\} = \mathrm{Hom}_{W_0}(W'_{3^k-1}, M)$.

Модуль W'_{3^k-1} допускает разложение в прямую сумму двумерных неприводимых W_0-модулей $\langle x_i^{(3^k)}\partial_1,\ x_i^{(3^k)}\partial_2\rangle,\ i = 1, 2$. Тогда в силу того, что $M = \langle\omega\rangle_F$ одномерен, имеем $\mathrm{Hom}_{W_0}(W'_{3^k-1}, M) = 0$, а значит, каждое слагаемое правой части выражения (3.2) равно нулю, то есть пространство $E_2^{0,1}$ тривиально.

Таким образом, в спектральной последовательности $\{E_r^{p,q}\}$, сходящейся к $H^*(W_{(0)}, M)$, пространства $E_r^{p,q}$ равны нулю, если $p+q = 1$. Откуда следует, что $H^1(W_{(0)}, M) = 0$.

Из (3.1) теперь следует, что $H^2(W, \Omega^2) \cong H^0(\Omega) \otimes H^2(W_{(0)}, M)$. Учитывая, что $H^0(\Omega) = F$, имеем $H^2(W, \Omega^2) \cong H^2(W_{(0)}, M)$. Так как данный изоморфизм сохраняет градуировку, а $H^2_+(W_{(0)}, M) = 0$, то $H^2_+(W, \Omega^2) = 0$.

Заметим, что $H^1(W, \Omega^2) \cong H^0(\Omega) \otimes H^1(W_{(0)}, M) + H^1(\Omega) \otimes H^0(W_{(0)}, M)$. Приведенные выше рассуждений показывают, что $H^0(W_{(0)}, M) = H^1(W_{(0)}, M) = 0$. Следовательно, группа $H^1(W, \Omega^2)$ тривиальна. Этот факт понадобится нам для вычисления $H^2_+(W, B^2(\Omega))$.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to B^2(\Omega) \to \Omega^2 \to \Omega^2/B^2(\Omega) \to 0.$$

Ей соответствует точная когомологическая последовательность

$$\ldots \to H^1_+(W, \Omega^2) \to H^1_+(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) \to H^2_+(W, B^2(\Omega)) \to H^2_+(W, \Omega^2) \to \ldots.$$

Так как $H^1_+(W, \Omega^2) = H^2_+(W, \Omega^2) = 0$, то $H^1_+(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) \cong H^2_+(W, B^2(\Omega))$.

Модуль $\Omega^2/B^2(\Omega)$ одномерен и порождается классом элемента $x^{(\delta)}\omega$, где $\delta = (p^{m_1} - 1, p^{m_2} - 1)$, откуда видно, что действие алгебры W на $\Omega^2/B^2(\Omega)$

тривиально. Следовательно, $H^1(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) \cong (W/[W,W])^* \otimes \Omega^2/B^2(\Omega)$. Поскольку W — простая алгебра Ли, то $W/[W,W] = 0$, то есть $H^1_+(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) = H^1(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) = 0$, поэтому $H^2_+(W, B^2(\Omega)) = 0$. ■

3.2. Выделение подалгебры, изоморфной $L_{\bar{0}}$ в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$

Дальнейшие рассуждения можно разделить на три этапа. На первом шаге в $\mathscr{L}$ выделяется подалгебра, изоморфная W, что позволяет наделить $\mathscr{L}$ структурой W-модуля. Затем устанавливается изоморфизм W-модулей L и $\mathscr{L}$. Наконец, на последнем этапе показывается, что алгебры L и $\mathscr{L}$ изоморфны. Данный параграф посвящен первому этапу исследования алгебры $\mathscr{L}$.

В процессе доказательства мы будем использовать следующие обозначения. Разложим алгебру $\mathscr{L}$ в прямую сумму подпространств: $\mathscr{L} = \oplus_{i\geqslant -1}(V_i \oplus M_i)$ так, что $(V_i + \mathscr{L}_{(i+1)})/\mathscr{L}_{(i+1)} = W_i$, $(M_i + \mathscr{L}_{(i+1)})/\mathscr{L}_{(i+1)} = (L_{\bar{1}})_i$. Пусть $\lambda\colon L \to \mathscr{L}$ — изоморфизм векторных пространств, отображающий W_i на V_i и $(L_{\bar{1}})_i$ на M_i, причем $\mathrm{gr} \circ \lambda(u) = u$, $u \in L_i$.

Тогда для $u \in L_i$, $v \in L_j$ умножение в $\mathscr{L}$ можно представить в виде

$$[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u,v]) + \sum_{r>0}(\mu_r(u,v) + \nu_r(u,v)),$$

где $\mu_r \in \mathrm{Hom}(L \wedge L, \oplus_l M_l)_r$, $\nu_r \in \mathrm{Hom}(L \wedge L, \oplus_l V_l)_r$ — однородные отображения степени r, принимающие значения в пространствах $\oplus_{l\geqslant -1} M_l$ и $\oplus_{l\geqslant -1} V_l$ соответственно.

Пусть $u \in L_i$, $v \in L_j, w \in L_k$. Через γ_r обозначим отображение $\mu_r + \nu_r$. Тогда

$$[[\lambda(u), \lambda(v)], \lambda(w)] = [\lambda([u,v]), \lambda(w)] + \sum_{r>0}[\gamma_r(u,v), \lambda(w)] = \lambda([[u,v],w]) +$$
$$+ \sum_{r>0}\gamma_r([u,v],w) + \sum_{r>0}\lambda([\lambda^{-1}\circ\gamma_r(u,v), w]) + \sum_{r,s>0}\gamma_s(\lambda^{-1}\circ\gamma_r(u,v), w). \quad (3.3)$$

Лемма 6. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры L. Тогда $\mathscr{L}$ содержит подалгебру, изоморфную W.*

Доказательство. Рассмотрим тождество Якоби

$$[[\lambda(u),\lambda(v)],\lambda(w)] + [[\lambda(v),\lambda(w)],\lambda(u)] + [[\lambda(w),\lambda(u)],\lambda(v)] = 0$$

для $u \in W_i$, $v \in W_j, w \in W_k$. Представляя каждое слагаемое согласно выражению (3.3) и выписывая однородные слагаемые из $M_{i+j+k+r}$, получаем

$$\mu_r([u,v],w) + \mu_r([v,w],u) + \mu_r([w,u],v) + \lambda([\lambda^{-1}\circ\mu_r(u,v),w])+ \\ + \lambda([\lambda^{-1}\circ\mu_r(v,w),u]) + \lambda([\lambda^{-1}\circ\mu_r(w,u),v]) + \sum_{s=1}^{r-1}(\mu_{r-s}(\lambda^{-1}\circ\gamma_s(u,v),w)+ \\ + \mu_{r-s}(\lambda^{-1}\circ\gamma_s(v,w),u) + \mu_{r-s}(\lambda^{-1}\circ\gamma_s(w,u),v)) = 0. \quad (3.4)$$

Индукцией по r выберем подпространства V_i так, чтобы $\mu_r(W,W) = 0$ для $r > 0$. Предположим, что μ_r обращается в нуль на $W \wedge W$ для всех $r \leqslant l$. Пусть $r = l+1$. Рассмотрим отображение $\varphi_r\colon W \wedge W \to L_{\bar{1}}$ такое, что $\varphi_r(u,v) = \lambda^{-1}\circ\mu_r(u,v)$ для $u \in W_i$, $v \in W_j$. По предположению индукции $\gamma_s(u,v) = \nu_s(u,v) \in \oplus_l V_l$ и $\mu_s(u,v) = 0$ для всех $u,v \in W$ и $0 < s < r$, поэтому $\sum_{s=1}^{r-1}(\mu_{r-s}(\lambda^{-1}\circ\gamma_s(u,v),w) + \mu_{r-s}(\lambda^{-1}\circ\gamma_s(v,w),u) + \mu_{r-s}(\lambda^{-1}\circ\gamma_s(w,u),v)) = 0$, и из (3.4) следует, что

$$\varphi_r([u,v],w) + \varphi_r([v,w],u) + \varphi_r([w,u],v)+ \\ + [\varphi_r(u,v),w] + [\varphi_r(v,w),u] + [\varphi_r(w,u),v] = 0,$$

то есть $\delta\varphi_r(u,v,w) = 0$. Таким образом, φ_r — коцикл степени r. Согласно предложению 21, $H^2_+(W,L_{\bar{1}}) = 0$, поэтому существует такое линейное отображение ψ_r степени r, $\psi_r\colon W \to L_{\bar{1}}$, что $\delta\psi_r = \varphi_r$:

$$[u,\psi_r(v)] - [v,\psi_r(u)] - \psi_r([u,v]) = \varphi_r(u,v).$$

Выберем подпространства $V'_i = (\mathrm{Id} - \lambda \circ \psi_r \circ \lambda^{-1})(V_i)$, $M'_i = M_i$ и отображения $\lambda'_{|V_i} = \lambda_{|V_i} - \lambda_{|V_i} \circ \psi_r$, $\lambda'_{|M_i} = \lambda_{|M_i}$. Положим $\mu'_s = \mu_s$ и $\nu'_s = (\mathrm{Id} - \lambda \circ \psi_r \circ \lambda^{-1}) \circ \nu_s$. Тогда для $u \in W_i$, $v \in W_j$ имеем

$$
\begin{aligned}
[\lambda'(u), \lambda'(v)] &= [\lambda(u) - \lambda \circ \psi_r(u), \lambda(v) - \lambda \circ \psi_r(v)] \equiv \\
&\equiv [\lambda(u), \lambda(v)] - [\lambda(u), \lambda \circ \psi_r(v)] - [\lambda \circ \psi_r(u), \lambda(v)] \equiv \\
&\equiv \lambda([u, v]) + \sum_{s \leqslant r} \mu_s(u, v) + \sum_{s \leqslant r} \nu_s(u, v) - \lambda([\psi(u), v] + [u, \psi(v)]) \equiv \\
&\equiv \lambda([u, v]) + \mu_r(u, v) + \sum_{s \leqslant r} \nu_s(u, v) - \lambda \circ \varphi_r(u, v) - \lambda \circ \psi_r([u, v]) \equiv \\
&\equiv \lambda'([u, v]) + \sum_{s \leqslant r} \nu'_s(u, v) \mod (\mathscr{L}_{(i+j+r+1)}).
\end{aligned}
$$

Следовательно, для построенных подпространств $\{V'_i\}$ отображение μ_r обращается в нуль на $W \wedge W$.

Мы можем считать, что подпространства $\{V_i\}$ изначально были выбраны так, что отображения μ_r, $r > 0$, тривиальны на $W \wedge W$. Это в точности означает, что $[V_i, V_j] \subset \oplus_{k \geqslant -1} V_k$, а следовательно, $\oplus_{i \geqslant -1} V_i$ — подалгебра в $\mathscr{L}$. В силу того, что V_i удовлетворяют условию $(V_i + \mathscr{L}_{(i+1)})/\mathscr{L}_{(i+1)} = W_i$ мы имеем $\mathrm{gr}(\oplus_{i \geqslant -1} V_i) \cong W$, то есть $\oplus_{i \geqslant -1} V_i$ является фильтрованной деформацией алгебры Ли W. Как известно, алгебра W является жесткой относительно фильтрованных деформаций. Таким образом, полученная в $\mathscr{L}$ подалгебра изоморфна W, причем ее стандартная фильтрация индуцируется фильтрацией алгебры $\mathscr{L}$. Отображение $\lambda_{|L_{\bar{0}}}$ является изоморфизмом $L_{\bar{0}} = W$ и $\oplus_{k \geqslant -1} V_k$, который однородному пространству W_i ставит в соответствие V_i. ∎

В дальнейшем мы будем отождествлять алгебру $\oplus_{k \geqslant -1} V_k$ и W, соответственно, полагая, что $V_i = W_i$.

3.3. Построение $\mathbb{Z}_2$-градуировки в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$

В этом параграфе мы переходим к следующему этапу рассуждений, а именно, к доказательству изоморфизма W-модулей $\mathscr{L}$ и L.

Лемма 7. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры L. Тогда алгебры $\mathscr{L}$ и L изоморфны как фильтрованные W-модули.*

Доказательство. Покажем, что W выделяется прямым слагаемым в W-модуле $\mathscr{L}$, $\mathscr{L} = W \oplus M$. Для этого достаточно установить, что $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}$ является $\widehat{W}_{(0)}$-модулем, где $\widehat{W}_{(0)} = W_{(0)} + \langle \partial_1^{p^{m_1}}, \partial_2^{p^{m_2}} \rangle$. Действительно, в этом случае каноническая проекция $\pi\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}$ является морфизмом $\widehat{W}_{(0)}$-модулей и, согласно свойству универсальности коиндуцированных модулей, существует единственный гомоморфизм W-модулей $\varphi\colon \mathscr{L} \to \overline{\mathrm{coind}}(\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)})$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{coind}}(\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}) \arrow[r, "\iota"] & \mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}, \\
\mathscr{L} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

где $\iota\colon \overline{\mathrm{coind}}(\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}) \to \mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}$ — отображение, определенное по правилу $\iota(f) = f(1)$ для $f \in \overline{\mathrm{coind}}(\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)})$. Заметим, что пересечение $\ker\varphi \cap W$ является идеалом W, а потому тривиально. При этом $\ker\varphi$ — W-модуль, содержащийся в $\mathscr{L}_{(0)}$, и значит, $\ker\varphi = 0$. Так как $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)} \cong W/\mathfrak{m}W \oplus \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$, то $\overline{\mathrm{coind}}(\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}) \cong$ $\cong W \oplus \Omega^2$, поэтому $\varphi\colon \mathscr{L} \to W \oplus \Omega^2$ — вложение, сохраняющее фильтрацию.

Отождествим $\mathscr{L}$ с $\varphi(\mathscr{L})$, тогда, поскольку $W \subset \mathscr{L}$, то $\mathscr{L} = W \oplus M$, где $M = \mathscr{L} \cap \Omega^2$. Известно, что $B^2(\Omega)$ является единственным собственным ненулевым подмодулем в Ω^2, следовательно, либо $M = B^2(\Omega)$, либо $M = \Omega^2$, в зависимости от случаев: $L = R(\overline{m})$ или $L = \widetilde{R}(\overline{m})$. Выберем в качестве M_i пространства стандартной градуировки модуля M. Тогда $\lambda_{|L_{\bar{1}}}$ — изоморфизм $L_{\bar{1}}$ и M. Кроме того, $\lambda([u, v]) = [\lambda(u), \lambda(v)]$, когда $u \in L_{\bar{0}}$, $v \in L$.

Модуль $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}$ можно наделить структурой $\widehat{W}_{(0)}$- модуля, если $\widehat{W}_{(0)}$ оставляет инвариантной подалгебру $\mathscr{L}_{(0)}$. Поэтому достаточно будет доказать, что $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(\mathscr{L}) = 0$ для $i = 1, 2$. В силу того, что $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(W) = 0$, отображение $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}} : \mathscr{L} \to \mathscr{L}$, является гомоморфизмом W-модулей. Предположим, что $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(\mathscr{L}) \neq 0$ для некоторого i. Тогда корректно определен гомоморфизм $\beta_i = \operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}} : \mathscr{L}/W \to \mathscr{L}$, причем β_i нетривиален. Пересечение $\operatorname{im}\beta_i \cap W$ является идеалом в W, поэтому либо $\operatorname{im}\beta_i \cap W = 0$, либо $\operatorname{im}\beta_i \supset W$. Второй случай, очевидно, невозможен: $\dim\operatorname{im}\beta_i \leqslant p^{|\overline{m}|} < \dim W$. Таким образом, β_i индуцирует ненулевой морфизм $\overline{\beta}_i : \mathscr{L}/W \to \mathscr{L}/W$.

В случае $L = R(\overline{m})$ модуль $\mathscr{L}/W$ неприводим, так как $\operatorname{gr}(\mathscr{L}/W) \cong B^2(\Omega)$ — неприводимый W-модуль. Тогда по лемме Шура $\overline{\beta}_i = c_i \operatorname{Id}, c_i \neq 0$. В случае $L = \widetilde{R}(\overline{m})$ имеем $\operatorname{gr}(\mathscr{L}/W) \cong \Omega^2$, поэтому модуль $\mathscr{L}/W$ может содержать собственный неприводимый W-подмодуль коразмерности 1, на котором $\overline{\beta}_i$ действует умножением на скаляр c_i. Но тогда $\overline{\beta}_i$ действует на $\mathscr{L}/W$ с собственным значением c_i. Действительно, предположив, что $\overline{\beta}_i(\overline{m}) = c_i'\overline{m}$, $c_i' \neq c_i$ для некоторого $\overline{m} \in \mathscr{L}/W$, мы получим, что в $\widetilde{R}(\overline{m})$ содержится 1-мерный W-подмодуль $\langle \operatorname{gr} m\rangle$, что невозможно. Таким образом, отображение $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}$ имеет на $\mathscr{L}$ только два собственных значения: 0 и c_i.

Для корневого разложения $\mathscr{L}$ относительно $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}$ имеем $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_{c_i}$, где $\mathscr{L}_0 = W$. Тогда $[\mathscr{L}_{c_i}, \mathscr{L}_{c_i}] \subset \mathscr{L}_{2c_i} = \{0\}$, поэтому $\mathscr{L}_{c_i}$ — идеал в $\mathscr{L}$, и, соответственно, $\operatorname{gr}\mathscr{L}_{c_i}$ — идеал в L. Подчеркнем, что $\dim\mathscr{L}_{c_i} = \dim L_{\bar{1}}$, а коразмерность идеала в алгебре L не может превосходить 1. Получили противоречие, следовательно, $c_i = 0$, а значит, $0 \neq \operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(\mathscr{L}) \subset W$. Ранее было показано, что пересечение $\operatorname{im}\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(\mathscr{L})$ и W тривиально. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. ■

Отметим еще раз, что в ходе доказательства леммы 7 мы выбрали подпространства M_i так, что $\lambda([u,v]) = [\lambda(u),\lambda(v)]$, при $u \in L_{\bar{0}}$, $v \in L$. В следующей теореме мы покажем, что $\lambda([u,v]) = [\lambda(u),\lambda(v)]$, когда $u,v \in L_{\bar{1}}$, то есть $\gamma_r(u,v) = 0$ для всех $r > 0$.

Теорема 3. *Если $\mathscr{L}$ — фильтрованная алгебра Ли такая, что $\mathrm{gr}\,\mathscr{L} = L$, где $L = R(\overline{m})$ или $\widetilde{R}(\overline{m})$, то $\mathscr{L} \cong L$.*

Доказательство. Из тождества Якоби

$$[\lambda(w),[\lambda(u),\lambda(v)]] = [[\lambda(w),\lambda(u)],\lambda(v)] + [\lambda(u),[\lambda(w),\lambda(v)]]$$

для элементов $u \in (L_{\bar{1}})_i, v \in (L_{\bar{1}})_j$ и $w \in W_k$ и равенств

$$[\lambda(w),[\lambda(u),\lambda(v)]] = \lambda([w,[u,v]]) + \sum_{r>0} \lambda([w,\lambda^{-1}\circ\gamma_r(u,v)])$$

и

$$\begin{aligned}
&[[\lambda(w),\lambda(u)],\lambda(v)] + [\lambda(u),[\lambda(w),\lambda(v)]] = \lambda([[w,u],v]) + \\
&\qquad + \sum_{r>0}\gamma_r([w,u],v) + \lambda([u,[w,v]]) + \sum_{r>0}\gamma_r(u,[w,v]),
\end{aligned}$$

которые следуют из соотношения (3.3), получаем, что

$$[w,\lambda^{-1}\circ\gamma_r(u,v)] = \lambda^{-1}\circ\gamma_r([w,u],v) + \lambda^{-1}\circ\gamma_r(u,[w,v]).$$

Пусть $\alpha = \lambda^{-1}\circ\gamma_r$, u,v — мономы, и $\alpha(u,v) \in L_{i+j+r}$, $r > 0$. Если $\alpha(u,v) \neq 0$, то, последовательно действуя элементами ∂_i, $i = 1,2$ на $\alpha(u,v)$ достаточное число раз, можно добиться того, чтобы результат лежал в $L_{-1}\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{ad}\,\partial_1)^{s_1}(\mathrm{ad}\,\partial_2)^{s_2}\alpha(u,v) = \\
&\quad = \sum_{t_1=0}^{s_1}\sum_{t_2=0}^{s_2}\binom{s_1}{t_1}\binom{s_2}{t_2}\alpha((\mathrm{ad}\,\partial_1)^{t_1}(\mathrm{ad}\,\partial_2)^{t_2}u,(\mathrm{ad}\,\partial_1)^{s_1-t_1}(\mathrm{ad}\,\partial_2)^{s_2-t_2}v).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Теперь заметим, что в правой части равенства (3.5) все слагаемые нулевые, так как аргументами кососимметрического отображения α являются либо 0, либо элементы из одномерного пространства $(L_{\bar{1}})_{-1}$. Таким образом, $\alpha = 0$ и $\gamma_r = 0$, что доказывает утверждение теоремы. ∎

Глава 4

Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y

Пусть $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ — тройка натуральных чисел, $O = O(3\colon \overline{m})$ — алгебра разделенных степеней, $W = W(3\colon \overline{m})$ — алгебра специальных дифференцирований алгебры O. Через Ω^1_{div} обозначим W-модуль дифференциальных 1-форм, на котором действие W определено формулой

$$D(f dx_i) = D(f)dx_i + fd(D(x_i)) + \mathrm{div}(D) f dx_i.$$

Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство $Y(\overline{m}) = Y_{\overline{0}} \oplus Y_{\overline{1}}$, где $Y_{\overline{0}} = W$, $Y_{\overline{1}} = \Omega^1_{\mathrm{div}}$. Умножение на $Y = Y(\overline{m})$ задано следующим образом:

1) $[,] : Y_{\overline{0}} \times Y_{\overline{0}} \to Y_{\overline{0}}$: стандартная операция умножения в алгебре W.

2) $[,] : Y_{\overline{0}} \times Y_{\overline{1}} \to Y_{\overline{1}}$: действие алгебры W на Ω^1_{div}.

3) $[,] : Y_{\overline{1}} \times Y_{\overline{1}} \to Y_{\overline{0}} : [f dx_i, g dx_j] = \sigma_{ijk}(fg)\partial_k$, где $f dx_i, g dx_j \in \Omega^1_{\mathrm{div}}$, индексы i, j, k попарно не равны друг другу, а σ_{ijk} определяет знак подстановки $(1, 2, 3) \mapsto (i, j, k)$.

Алгебры Ли серии Y обладают $\mathbb{Z}$-градуировкой глубины 2, $Y = Y_{-2} \oplus Y_{-1} \oplus \oplus Y_0 \oplus Y_1 \oplus Y_2 \oplus \ldots$, где

$$Y_{2i} = W_i,\ i \geqslant -1,$$
$$Y_{2i+1} = \langle x^{(\alpha)} dx_k \ :\ 1 \leqslant k \leqslant 3,\ |\alpha| = i + 1\rangle,\ i \geqslant -1.$$

4.1. Вычисление группы $H^2_{(0)}(W, \Omega^1_{\mathrm{div}})$

Для описания фильтрованных деформаций алгебры Y нам потребуется следующее утверждение.

Предложение 22. *Группа* $H^2_{(0)}(W, \Omega^1_{\mathrm{div}})$ *тривиальна.*

Доказательство. Известно, что модуль Ω^1_{div} является коиндуцированным с модуля $\Omega^1_{\mathrm{div}}/\mathfrak{m}\Omega^1_{\mathrm{div}} = \langle dx_1,\, dx_2,\, dx_3\rangle_F$, а именно: $\Omega^1_{\mathrm{div}} \cong \overline{\mathrm{coind}}(\Omega^1_{\mathrm{div}}/\mathfrak{m}\Omega^1_{\mathrm{div}})$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал алгебры O. Обозначим $\Omega^1_{\mathrm{div}}/\mathfrak{m}\Omega^1_{\mathrm{div}}$ через M. Так как элементы $\partial_i^{p^{m_i}}, i = \overline{1,3}$, действуют на M тривиально, то выполнены условия предложения 20, а значит, имеет место изоморфизм

$$H^2(W, \Omega^1_{\mathrm{div}}) \cong H^2(\Omega) \otimes H^0(W_{(0)}, M) \oplus \\ \oplus H^1(\Omega) \otimes H^1(W_{(0)}, M) \oplus H^0(\Omega) \otimes H^2(W_{(0)}, M), \quad (4.1)$$

где $H^i(\Omega)$ — когомологии де Рама.

Докажем, что $H^0(W_{(0)}, M) = H^1(W_{(0)}, M) = 0$. Так как $W_0 dx_i \neq \{0\}$, то $H^0(W_{(0)}, M) = \{m \in M | W_{(0)} m = 0\} = 0$.

Тривиальность группы когомологий $H^1(W_{(0)}, M)$ установим, показав, что пространства $E_2^{0,1}$ и $E_2^{1,0}$ спектральной последовательности Серра-Хохшильда $\{E_r^{p,q}\}$ для алгебры $W_{(0)}$, ее идеала $W_{(1)}$ и модуля M равны нулю. По определению,

$$E_2^{0,1} = H^0(W_{(0)}/W_{(1)}, H^1(W_{(1)}, M)) = H^0(W_0, H^1(W_{(1)}, M)),$$
$$E_2^{1,0} = H^1(W_{(0)}/W_{(1)}, H^0(W_{(1)}, M)) = H^1(W_0, H^0(W_{(1)}, M)).$$

Так как $W_{(1)}$ действует тривиально на пространстве M, то

$$H^0(W_{(1)}, M) \cong M \text{ и}$$
$$H^1(W_{(1)}, M) \cong (W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}])^* \otimes M.$$

Согласно предложению 8, имеет место изоморфизм $W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}] \cong W_1 + {} + \sum_k W'_{3^k-1}$, где $W'_{3^k-1} = \langle x_i^{(3^k)} \partial_j, 1 \leqslant i, j \leqslant 3\rangle \subset W_{3^k-1}$, поэтому

$$H^1(W_{(1)}, M) \cong W_1^* \otimes M + \sum_k W'^*_{3^k-1} \otimes M.$$

Таким образом,

$$E_2^{1,0} \cong H^1(W_0, M),$$
$$E_2^{0,1} \cong H^0(W_0, W_1^* \otimes M) + \sum_k H^0(W_0, W'^*_{3^k-1} \otimes M).$$

Заметим, что элемент $z = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$ из центра универсальной обертывающей алгебры W действует на M тождественно: $z \cdot dx_i = dx_i$. Следовательно, $H^1(W_0, M) = 0$ (см. предложение 1). Так как $[z, x_i^{(p^t)}\partial_j] = -x_i^{(p^t)}\partial_j$, то z действует на $W'^*_{3^k-1} \otimes M$ умножением на 2, откуда $H^0(W_0, W'^*_{3^k-1} \otimes M) = 0$, поэтому $E_2^{0,1} \cong H^0(W_0, W_1^* \otimes M)$.

В силу того, что $W_1^* \otimes M \cong \mathrm{Hom}_F(W_1, M)$, имеем

$$H^0(W_0, W_1^* \otimes M) \cong H^0(W_0, \mathrm{Hom}_F(W_1, M)) =$$
$$= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_F(W_1, M) | D\varphi = 0 \,\forall D \in W_0\}$$

или, что то же самое, $E_2^{0,1} \cong \{\varphi \in \mathrm{Hom}_F(W_1, M) | [D, \varphi(D')] = \varphi([D, D']) \,\forall D \in$ $\in W_0, D' \in W_1\} = \mathrm{Hom}_{W_0}(W_1, M)$. Структура модуля W_1 как W_0-модуля известна и приведена в предложении 9, что влечет изоморфизм $\mathrm{Hom}_{W_0}(W_1, M) \cong$ $\cong \mathrm{Hom}_{W_0}(W_1', M) + \mathrm{Hom}_{W_0}(W_1'', M)$, где W_1' и W_1'' — неприводимые W_0-модули, причем $\dim W_1' > \dim M$ и $W_1'' = \langle x_i z \rangle$. Тогда из неприводимости M следует, что $\mathrm{Hom}_{W_0}(W_1', M) = 0$. Очевидно, что соответствие $x_i z \mapsto dx_i$ является изоморфизмом W_0-модулей W_1'' и $M' = \langle dx_1,\, dx_2,\, dx_3 \rangle_F$, на котором W_0 действует стандартным образом. Как векторные пространства модули M' и M совпадают, но действие W_0 на M и M' различны, следовательно, $W_1'' \ncong M$, поэтому $\mathrm{Hom}_{W_0}(W_1'', M) = 0$. Таким образом, $E_2^{0,1} = 0$.

В результате, мы получили, что в спектральной последовательности $\{E_r^{p,q}\}$ пространства, удовлетворяющие условию $p + q = 1$, равны нулю, следовательно, $H^1(W_{(0)}, M) = 0$. Изоморфизм из формулы (4.1) теперь можно переписать как $H^2(W, \Omega^1_{\mathrm{div}}) \cong H^0(\Omega) \otimes H^2(W_{(0)}, M)$ и, так как $H^0(\Omega) \cong F$, а изоморфизм сохраняет градуировку, имеем $H^2_{(0)}(W,\Omega^1_{\mathrm{div}}) \cong H^2_{(0)}(W_{(0)},\Omega^1_{\mathrm{div}}/\mathfrak{m}\Omega^1_{\mathrm{div}})$. Поскольку $H^2_{(0)}(W_{(0)},\Omega^1_{\mathrm{div}}/\mathfrak{m}\Omega^1_{\mathrm{div}}) = 0$, то $H^2_{(0)}(W,\Omega^1_{\mathrm{div}}) = 0$. Лемма доказана. ∎

4.2. Построение в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$ подалгебры, изоморфной W

Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры Ли Y. Покажем, что $\mathscr{L}$ содержит W в качестве подалгебры. Это позволит рассматривать $\mathscr{L}$ как W-модуль, структура которого будет исследована в дальнейшем.

Выберем дополонительные подпространства $V_i \subset \mathscr{L}_{(i)}$ в соответствии с фильтрацией $\mathscr{L}_{(-2)} \supset \mathscr{L}_{(-1)} \supset \ldots \supset \mathscr{L}_{(i)} \supset \ldots$ на алгебре $\mathscr{L}$, то есть такие V_i, что $\mathscr{L}_{(i)} = V_i \oplus \mathscr{L}_{(i+1)}$. Тогда, так как $\mathscr{L}_{(i)}/\mathscr{L}_{(i+1)} = Y_i$, векторные пространства V_i и Y_i изоморфны для $i \geqslant -2$. Следовательно, отображение $\lambda\colon\ \mathrm{gr}\,\mathscr{L} \cong Y \to \mathscr{L}$ определенное так, что $\lambda(Y_i) = V_i$ и $\mathrm{gr}\circ\lambda = \mathrm{Id}$, устанавливает изоморфизм пространств Y и $\mathscr{L}$. Умножение в алгебре $\mathscr{L}$ можно связать с умножением в Y, полагая

$$[\lambda(u),\lambda(v)] = \lambda([u,v]) + \sum_{r>0}\mu_r(u,v) \tag{4.2}$$

для $u \in Y_i$ и $v \in Y_j$, где $\mu_r \in \mathrm{Hom}(Y \wedge Y, \oplus_l V_l)_r$ — однородное отображение степени r. Очевидно, значения отображения μ_r зависят от выбора пространств V_i. Таким образом, если при некотором выборе набора $\{V_i\}$ мы получим, что $\mu_r = 0$, $r > 0$, то это в точности означает, что алгебры $\mathscr{L}$ и Y изоморфны, а λ является изоморфизмом. Наши дальнейшие рассуждения позволяют выбрать набор $\{V_i\}$, удовлетворяющий этому свойству.

Лемма 8. *Фильтрованная деформация $\mathscr{L}$ алгебры Ли Y содержит подалгебру, изоморфную W.*

Доказательство. Пусть $u \in Y_i$, $v \in Y_j$ и $w \in Y_k$, тогда, представляя операцию умножения в виде (4.2), получаем соотношение

$$[[\lambda(u), \lambda(v)], \lambda(w)] = [\lambda([u, v]) + \sum_{r>0} \mu_r(u, v), \lambda(w)] = \lambda([[u, v], w]) + \\ + \sum_{r>0} \mu_r([u, v], w) + \sum_{r>0} \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(u, v), w]) + \sum_{r>0} \sum_{s>0} \mu_r(\lambda^{-1} \circ \mu_s(u, v), w).$$

Выписав однородные слагаемые степени $i + j + k + r$ для $r > 0$ из тождества Якоби

$$[[\lambda(u), \lambda(v)], \lambda(w)] + [[\lambda(v), \lambda(w)], \lambda(u)] + [[\lambda(w), \lambda(u)], \lambda(v)] = 0,$$

получаем

$$\mu_r([u, v], w) + \mu_r([v, w], u) + \mu_r([w, u]v) + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(u, v), w]) + \\ + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(v, w), u]) + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(w, u), v]) + \sum_{t=1}^{r-1} \mu_{r-t}(\lambda^{-1} \circ \mu_t(u, v), w) + \\ + \sum_{t=1}^{r-1} \mu_{r-t}(\lambda^{-1} \circ \mu_t(v, w), u) + \sum_{t=1}^{r-1} \mu_{r-t}(\lambda^{-1} \circ \mu_t(w, u), v) = 0. \quad (4.3)$$

Индукцией по нечетным r покажем, что подпространства V_i можно выбрать так, что $\mu_r(W, W) = 0$ для нечетных r. Пусть μ_r обращается в нуль на $W \wedge W$ для всех $r \leqslant l$ таких, что $r \not\equiv 0 \mod (2)$. Докажем, что оно имеет место при $r = l + 1$. Можно считать, что $l = 2k$. Рассмотрим отображение $\varphi_r \colon W \wedge W \to \Omega^1_{\mathrm{div}}$, заданное формулой

$$\varphi_r(u, v) = \lambda^{-1} \circ \mu_r(u, v)$$

для $u \in W_{2i}$ и $v \in W_{2j}$. В силу индукционного предположения $\mu_t(u, v) = 0$ для нечетных $t, 0 < t < r$, поэтому соответствующие слагаемые в (4.3) обращаются в нуль:

$$\mu_r([u, v], w) + \mu_r([v, w], u) + \mu_r([w, u]v) + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(u, v), w]) + \\ + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(v, w), u]) + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(w, u), v]) = 0.$$

Откуда

$$\varphi_r([u,v],w)+\varphi_r([v,w],u)+\varphi_r([w,u]v)+$$
$$+[\varphi_r(u,v),w]+[\varphi_r(v,w),u]+[\varphi_r(w,u),v]=0,$$

то есть φ_r является коциклом степени $k=(r-1)/2\geqslant 0$, $\varphi_r\in Z^2_k(W,\Omega^1_{\mathrm{div}})$. Согласно предложению 22, группа $H^2_k(W,\Omega^1_{\mathrm{div}})$ тривиальна для всех $k\geqslant 0$, поэтому существует линейное отображение степени k, $\psi_r\colon W\to\Omega^1_{\mathrm{div}}$ такое, что $\delta\psi_r=\varphi_r$. Это равносильно тому, что

$$[u,\psi_r(v)]-[v,\psi_r(u)]-\psi_r([u,v])=\varphi_r(u,v),$$

где $u,v\in W$.

Положим

$$V'_{2i}=(\mathrm{Id}-\lambda\circ\psi_r\circ\lambda^{-1})(V_{2i}),$$
$$V'_{2i+1}=V_{2i+1}.$$

Соответственно, изоморфизм векторных пространств Y и $\mathscr{L}$ примет вид $\lambda'_{|W}=$ $=\lambda_{|W}-\lambda\circ\psi_r$, $\lambda'_{|\Omega^1_{\mathrm{div}}}=\lambda_{|\Omega^1_{\mathrm{div}}}$. Тогда для $u\in W_i$, $v\in W_j$ справедливы сравнения:

$$\begin{aligned}[\lambda'(u),\lambda'(v)]&=[\lambda(u)-\lambda\circ\psi_r(u),\lambda(v)-\lambda\circ\psi(v)]\equiv\\&\equiv\lambda([u,v])+\sum_{s<r}\mu_s(u,v)+\mu_r(u,v)-\lambda([\psi(u),v]+[u,\psi(v)])\equiv\\&\equiv\lambda'([u,v])+\sum_{s<r}\mu_s(u,v)+\mu_r(u,v)-\lambda(\varphi_r(u,v))\equiv\\&\equiv\lambda'([u,v])+\sum_{s<r}\mu_s(u,v)\equiv\lambda'([u,v])\mod\mathscr{L}_{(2i+2j+r+1)},\end{aligned}$$

из которых следует, что $\mu_r(u,v)=0$ для всех $r\leqslant l+1$, $r\not\equiv 0\mod(2)$, где $u,v\in W$. Это означает, что в согласованном с фильтрацией разложении алгебры $\mathscr{L}$ на подпространства $\{V_i\}$, V_s можно выбрать так, что $[V_{2i},V_{2j}]\subset\oplus_{k\geqslant-1}V_{2k}$, то есть $\mathscr{W}=\oplus_{i\geqslant-1}V_{2i}$ является подалгеброй в $\mathscr{L}$. Так как $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация Y, то, по выбору V_i, подалгебра $\mathscr{W}$ является фильтрованной деформацией алгебры W. Из жесткости W относительно фильтрованных деформаций заключаем, что $\mathscr{W} \cong W$. Лемма доказана. ■

Таким образом, мы можем считать, что $\lambda(W) = \mathscr{W}$, причем $\lambda(W_i) = \lambda(Y_{2i}) = V_{2i}$. В дальнейшем будем отождествлять $\mathscr{W}$ и W.

4.3. Доказательство жесткости алгебр Ли серии Y относительно фильтрованных деформаций

Будем придерживаться обозначений предыдущего параграфа. Тогда мы должны показать, что $\mu_r \equiv 0$ для всех $r > 0$.

Следующая лемма описывает структуру $\mathscr{L}$ как W-модуля.

Лемма 9. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры Ли Y. Тогда $\mathscr{L}$ и Y — изоморфные W-модули.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}_{(s)}$ — последний ненулевой член фильтрации, тогда $\mathscr{L}_{(s-1)} = V_{s-1} \oplus V_s$. Предположим, что V_s и V_{s-1} являются $\widehat{W}_{(0)}$-модулями, где $\widehat{W}_{(0)} = W_{(0)} + \langle \partial_1^{p^{m_1}}, \partial_2^{p^{m_2}}, \partial_3^{p^{m_3}} \rangle$. Тогда мы можем применить свойство универсальности для индуцированных модулей $\overline{\operatorname{ind}}\, V_s = U(W) \otimes_{U(\widehat{W}_{(0)})} V_s$ и $\overline{\operatorname{ind}}\, V_{s-1} = U(W) \otimes_{U(\widehat{W}_{(0)})} V_{s-1}$. Так как

$$V_{s-1} =< x^{(\delta)}\partial_i | 1 \leqslant i \leqslant 3 > \quad \text{и} \quad V_s =< x^{(\delta)}dx_i | 1 \leqslant i \leqslant 3 >,$$

где $\delta = (p^{m_1} - 1, p^{m_2} - 1, p^{m_3} - 1)$, то справедливы изоморфизмы $\overline{\operatorname{ind}}\, V_{s-1} \cong W$ и $\overline{\operatorname{ind}}\, V_s \cong \Omega^1_{\mathrm{div}}$. Таким образом, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} V_{s-1} \oplus V_s \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\iota"'] & W \oplus \Omega^1_{\mathrm{div}}, \arrow[dl, "\varphi"] \\ \mathscr{L} & \end{tikzcd}$$

где вложение $\iota\colon V_{s-1}\oplus V_s \to \mathscr{L}$ является морфизмом $\widehat{W}_{(0)}$-модулей, отображение $\kappa\colon V_{s-1}\oplus V_s \to W\oplus\Omega^1_{\mathrm{div}}$ — естественное вложение, φ — гомоморфизм W-модулей. Пересечение $\ker\varphi$ и W является идеалом в W, следовательно, $\ker\varphi\cap W = 0$. Так как $\ker\varphi\cap\Omega^1_{\mathrm{div}}$ — W-подмодуль в Ω^1_{div} коразмерности не меньше 1, то либо $\ker\varphi\cap\Omega^1_{\mathrm{div}} = B^1(\Omega)_{\mathrm{div}}$, либо $\ker\varphi\cap\Omega^1_{\mathrm{div}} = 0$ в силу того, что $B^1(\Omega)_{\mathrm{div}}$ — минимальный W-подмодуль в Ω^1_{div}. Но первый случай, очевидно, невозможен в силу того, что иначе в $\mathscr{L}_{(0)}$ содержался бы собственный W-подмодуль. Таким образом, $\ker\varphi = 0$ и поскольку $\dim W\oplus\Omega^1_{\mathrm{div}} = \dim\mathscr{L}$, то φ — изоморфизм W-модулей.

Итак, утверждение будет справедливо, если V_s и V_{s-1} — $\widehat{W}_{(0)}$-модули. Ранее было показано, что подалгебра W расположена в $\mathscr{L}$ в соответствии с фильтрацией, поэтому нужно доказать лишь инвариантность этих подпространств относительно отображений $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}$, $i = \overline{1,3}$. Так как $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(W) = 0$ и $V_{s-1}\subset W$, то $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(V_{s-1}) = 0$. Чтобы доказать инвариантность V_s заметим, что $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(x^{(\delta)}dx_j)$ содержится в $C_{\mathscr{L}}(W_{(1)})$. Поскольку $C_Y(W_{(1)}) = Y_{s-1}\oplus Y_s$, то $C_{\mathscr{L}}(W_{(1)}) = V_{s-1}\oplus V_s$. Таким образом, $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(x^{(\delta)}dx_j)\in V_{s-1}\oplus V_s$. Элемент $z = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$ действует на V_{s-1} и V_s умножением на -1 и 1, соответственно. Имеем

$$[z, \operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(x^{(\delta)}dx_j)] = \operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}([z, x^{(\delta)}dx_i]) = \operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(x^{(\delta)}dx_j),$$

откуда делаем вывод, что $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(x^{(\delta)}dx_j)\in V_s$. То есть $\operatorname{ad}\partial_i^{p^{m_i}}(V_s)\subseteq V_s$, что завершает доказательство. ■

Поскольку изоморфизм W-модулей Y и $\mathscr{L}$ устанавливает отображение λ, сохраняющее фильтрацию, то мы можем считать, что $V_{2i+1} = (\Omega^1_{\mathrm{div}})_i$ и $\lambda([u,v]) = [\lambda(u),\lambda(v)]$ для $u\in W$, $v\in Y$.

Теорема 4. *Если $\mathscr{L}$ — фильтрованная алгебра Ли такая, что $\operatorname{gr}\mathscr{L} = Y$, то $\mathscr{L}\cong Y$.*

Доказательство. Покажем, что набор пространств $\{V_i\}$ задает градуировку в $\mathscr{L}$, иными словами, что $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$ для всех $i, j \geqslant -2$.

Элемент $z = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$ действует на элементы из V_{2i} умножением на i и на элементы из V_{2i+1} — на $i-1$, поэтому

$$[v_{2i+1}, v_{2j+1}] = w_{2(i+j+1)} + \sum_{\substack{k>i+j+1,\\ i+j+1\equiv k(3)}} w_{2k} + \sum_{\substack{l>i+j+1,\\ i+j+1\equiv l-1(3)}} v_{2l+1}, \tag{4.4}$$

где $w_{2k} \in V_{2k}$ и $v_{2l+1} \in V_{2l+1}$.

Индукцией по i, j покажем, что $[V_{2i+1}, V_{2j+1}] \subset V_{2(i+j+1)} = W_{i+j+1}$. Докажем сначала, что $[dx_j, v_{2l+1}] \in W_l$ для всех $v_{2l+1} \in V_{2l+1}$ и $l \geqslant -1$. Пусть $\mathscr{L} = \bigoplus\limits_{k=-1}^{s}(V_{2k} \oplus V_{2k+1})$, где $s = p^{m_1} + p^{m_2} + p^{m_3} - 4$. Через δ обозначим вектор $(p^{m_1}-1, p^{m_2}-1, p^{m_3}-1)$, тогда $[dx_j, x^{(\delta)}dx_k] \in W_s$, так как в силу (4.4) слагаемые более высоких степеней тривиальны. Теперь, поскольку $[V_{-2}, V_{2i+1}] = V_{2i-1}$ и $[\partial_t, [dx_j, x^{(\alpha)}dx_k]] = [dx_j, \partial_t x^{(\alpha)}dx_k]$, то $[dx_j, V_{2l+1}] \in W_l$ для всех $l \geqslant -1$. Пусть утверждение справедливо для всех $i, j, i < q$ и $i = q, j < r$. Поскольку

$$[\partial_k, [v_{2i+1}, v_{2j+1}]] = [v_{2i+1}, [\partial_k, v_{2j+1}]] + [[\partial_k, v_{2i+1}], v_{2j+1}],$$

то оно верно и для $i = r,\ j = q$, откуда делаем вывод о справедливости утверждения для всех $i \geqslant -1,\ j \geqslant -1$.

Следовательно, алгебра $\mathscr{L}$ изоморфна Y как алгебра Ли. ∎

Глава 5

Фильтрованные деформации алгебр Ли серии X

5.1. Геометрическая реализация алгебр Ли серии X

Следуя [47], определим серию X исключительных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 3. Пусть $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3)$ — тройка натуральных чисел, $O(\overline{m}) = O(3\colon \overline{m})$ — алгебра разделенных степеней, $W = W(3\colon \overline{m})$ — алгебра специальных дифференцирований, $\Omega^* = \Omega^*(3\colon \overline{m})$ — комплекс дифференциальных форм. Стандартную форму объема $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ обозначим через ω_0. Для некоторого обратимого элемента h из пополнения алгебры разделеных степеней $\widehat{O}(E)$, удовлетворяющего условию $h^{-1}dh \in \Omega^1(\overline{m})$, определим подкомплекс $\Omega^*_h(\overline{m}) = \{h\Theta | \Theta \in \Omega^*(3\colon \overline{m})\}$ комплекса $\widehat{\Omega}^*(E)$.

Для формы $\omega = h\omega_0$ определен изоморфизм $i_\omega\colon \widehat{W}(E) \to \widehat{\Omega}^2(E)$, который элементу D ставит в соответствие 2-форму $D \lrcorner \omega$. Пусть $\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$ — фильтрованная деформация специальной алгебры Ли картановского типа, состоящая из всех элементов, аннулирующих форму ω. Поскольку неизоморфные деформации специальной алгебры Ли картановского типа соответствуют трем различным формам ω, то далее будем считать, что либо $h = 1$, либо $1 + x^{(\delta)}$, либо $\exp(x_i^{(p^{m_i})})$. Покажем, что $i_\omega(\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)) = Z^2(\Omega_h)$ и $i_\omega(S(3\colon \overline{m}, \omega)) = B^2(\Omega_h)$. Заметим, что в случае $h = \exp(x_i^{(p^{m_i})})$ последние два равенства эквивалентны, так как $\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$ проста и, в силу предложения 7, $B^2(\Omega_h) = Z^2(\Omega_h)$. Поскольку алгебра $S(3\colon \overline{m}, \omega)$ порождена элементами $D_{ij}(f) = h^{-1}(\partial_i(hf)\partial_j - \partial_j(hf)\partial_i)$, и $D_{ij}(f) \lrcorner \omega = -\sigma_{ijk} d(hf) \wedge dx_k \in B^2(\Omega_h)$, где σ_{ijk} — знак перестановки $(1\ 2\ 3) \mapsto (i\ j\ k)$, то $i_\omega(S(3\colon \overline{m}, \omega)) \subset B^2(\Omega_h)$. Обратное включение также имеет место. В случае, когда $h = 1$ или $1 + x^{(\delta)}$, имеем равенство $\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega) = S(3\colon \overline{m}, \omega) \oplus \langle x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_k \rangle$. В силу того, что

$x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k \lrcorner \omega = \sigma_{ijk}x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i \wedge dx_j \in Z^2(\Omega_h)$ и, так как, согласно предложению 7, группа когомологий де Рама $H^2(\Omega_h)$ трехмерна, мы делаем вывод о том, что $i_\omega(\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)) = Z^2(\Omega_h)$.

Заметим, что описанный выше изоморфизм $S(3\colon \overline{m}, \omega_0)$-модулей $B^2(\Omega)$ и $S(3\colon \overline{m}, \omega_0)$, а также предложение 15 влекут изоморфизм $S(3\colon \overline{m}, \omega_0)^*$ и $S(3\colon \overline{m}, \omega_0)$.

Введем структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры на пространстве $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega) = \widetilde{X}_{\overline{0}} \oplus \widetilde{X}_{\overline{1}}$, где $\widetilde{X}_{\overline{0}} = \widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$ и $\widetilde{X}_{\overline{1}} = Z^1(\Omega_{h^{-1}})$, определив следующую операцию умножения: $[\varphi, \psi] = i_\omega^{-1}(\varphi \wedge \psi)$ для $\varphi, \psi \in X_{\overline{1}}$, $[D, \varphi] = D \cdot \varphi$ для $\varphi \in X_{\overline{1}}, D \in X_{\overline{0}}$, умножение элементов из $X_{\overline{0}}$ совпадает с умножением в алгебре $\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$. Заметим, что для значений h, которые мы рассматриваем, $h^{-2} = h$, поэтому внешнее произведение $\varphi \wedge \psi$ содержится в $Z^2(\Omega_h)$, а значит, умножение задано корректно. В работе [47] показано, что алгебра $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)$ с умножением $[,]$ является алгеброй Ли.

Напомним, что $\mathcal{O}_{h^{-1}}(\overline{m})$ обозначает $\{h^{-1}f | f \in \mathcal{O}(\overline{m})\}$, а $W_{h^{-1}}(\overline{m})$ — свободный $\mathcal{O}_{h^{-1}}(\overline{m})$-модуль с базисом $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$. Положим $\mathcal{O}'_{h^{-1}}(\overline{m}) = \operatorname{div} W_{h^{-1}}(\overline{m})$. Из [33] известно, что $d(\mathcal{O}'_{h^{-1}}(\overline{m}))$ — наименьший неприводимый $\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$-подмодуль в $\Omega^1_{h^{-1}}(\overline{m})$. Теперь мы можем описать идеалы в $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)$:

$$X'(\overline{m}, \omega) = \widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega) \oplus B^1(\Omega_{h^{-1}}),$$

$$X''(\overline{m}, \omega) = S(3\colon \overline{m}, \omega) \oplus B^1(\Omega_{h^{-1}}),$$

$$X'''(\overline{m}, \omega) = S(3\colon \overline{m}, \omega) \oplus d(\mathcal{O}'_{h^{-1}}(\overline{m})).$$

В случае, когда $h = \exp(x_i^{(p^{m_i})})$, алгебра $\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$ проста, и по предложению 7 имеет место равенство $B^1(\Omega_{h^{-1}}) = Z^1(\Omega_{h^{-1}})$, поэтому $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega) = X'(\overline{m}, \omega) = X''(\overline{m}, \omega)$. Кроме того, $\mathcal{O}'_{h^{-1}}(\overline{m})$ — собственный подмодуль, причем $[\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega), B^1(\Omega_{h^{-1}})]$ содержится в неприводимом подмодуле $d(\mathcal{O}'_{h^{-1}}(\overline{m}))$, а значит, $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(1)} = X'''(\overline{m}, \omega)$. Размерность $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(1)}$ равна $p^{|\overline{m}|+1} - 1$, где $|\overline{m}| = m_1 + m_2 + m_3$.

Если $h = 1 + x^{(\delta)}$, то $O'_{h^{-1}}(\overline{m}) = O_{h^{-1}}(\overline{m})$, поэтому $X''(\overline{m}, \omega) = X'''(\overline{m}, \omega)$. Заметим, что $[Z^1(\Omega_{h^{-1}}), Z^1(\Omega_{h^{-1}})] = \widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$. Действительно, $[Z^1(\Omega_{h^{-1}}), Z^1(\Omega_{h^{-1}})] \cap \cap S(3\colon \overline{m}, \omega) \neq 0$, откуда в силу простоты алгебры $S(3\colon \overline{m}, \omega)$ следует, что $[Z^1(\Omega_{h^{-1}}), Z^1(\Omega_{h^{-1}})] \supset S(3\colon \overline{m}, \omega)$. Элементы $x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_k$ с точностью до знака совпадают с произведениями $[x_i^{(p^{m_i}-1)} dx_i, x_j^{(p^{m_j}-1)} dx_j]$. Поскольку $H^1(\Omega_{h^{-1}})$ — тривиальный $\widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega)$-модуль, то из неприводимости модуля $B^1(\Omega_{h^{-1}})$, имеем $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(1)} = X'(\overline{m}, \omega)$. Соответственно, $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(2)} = X''(\overline{m}, \omega)$. Размерность $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(2)}$ равна $p^{|\overline{m}|+1} - 3$.

Наконец, пусть $h = 1$. Так как имеют место равенства $[Z^1(\Omega), Z^1(\Omega)] = = \widetilde{S}(3\colon \overline{m})$ и $[\widetilde{S}(3\colon \overline{m}), Z^1(\Omega)] = B^1(\Omega)$, то $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(1)} = X'(\overline{m}, \omega)$. Из включений $[\widetilde{S}(\overline{m}), dx^{(\delta)}] \subset O'(\overline{m})$ и $[B^1(\Omega), B^1(\Omega)] \subset S(\overline{m})$ следует, что $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(2)} = X'''(\overline{m}, \omega)$. Размерность второго коммутанта $\widetilde{X}(\overline{m}, \omega)^{(2)}$ равна $p^{|\overline{m}|+1} - 4$.

Поскольку алгебра $S(3\colon \overline{m}, \omega)$ проста, а $S(3\colon \overline{m}, \omega)$-модуль $d(O'_{h^{-1}}(\overline{m}))$ неприводим и неизоморфен $S(3\colon \overline{m}, \omega)$, то алгебра $X'''(\overline{m}, \omega)$ является простой для любой из рассматриваемых нами форм.

Рассмотрим простую алгебру Ли $X = X'''(\overline{m}, \omega_0) = X_{\overline{0}} \oplus X_{\overline{1}}$. В [47] показано, что X является однородной подалгеброй в градуированной алгебре Ли $Y(\overline{m})$, поэтому формула для произведения элементов алгебры $Y(\overline{m})$, $[f dx_i, g dx_j] = = \sigma_{ijk}(fg)\partial_k$, где $f dx_i, g dx_j \in \Omega^1$, индексы i, j, k попарно различны, а σ_{ijk} — знак подстановки $(i\ j\ k)$, задает умножение элементов из $X_{\overline{1}}$. Алгебра X наделена индуцированной с $Y(\overline{m})$ $\mathbb{Z}$-градуировкой $X = X_{-2} \oplus X_{-1} \oplus X_0 \oplus \ldots$, где $X_{2i} = = X \cap \widetilde{S}(3\colon \overline{m}, \omega_0)_i$, $X_{2i+1} = X \cap \Omega^1_i$, $i \geqslant -1$.

Простую алгебру Ли $S(3\colon \overline{m}, \omega)$ в дальнейшем будем обозначать через $S(\omega)$, а $S(3\colon \overline{m}, \omega_0)$ — через S. Модуль $d(O'_{h^{-1}}(\overline{m}))$ обозначим через $dO'_{h^{-1}}$, если, кроме того, $h = 1$, то вместо $d(O'_{h^{-1}})$ будем писать dO'.

Далее будет показано, что алгебра Ли X является жесткой относительно фильтрованных деформаций, то есть любая фильтрованная деформация $\mathscr{L}$ алгебры X изоморфна X. Более подробно, мы установим, что $\mathscr{L}$ содержит подалгебру, которая является фильтрованной деформацией алгебры S, то есть можно считать, что S или $S((1+x^{(\delta)})\omega_0)$ содержится в $\mathscr{L}$ в качестве подалгебры. Затем мы покажем, что эта подалгебра выделяется в $\mathscr{L}$ прямым слагаемым как S или $S((1+x^{(\delta)})\omega_0)$-модуль, соответственно. Тогда дополнительное к ней пространство является модулем, изоморфным $d\mathcal{O}'$ или $d\mathcal{O}'_{1-x^{(\delta)}}$. Сравнивая размерности, мы видим, что второй случай, когда $\omega = (1+x^{(\delta)})\omega_0$, невозможен, поэтому алгебра $\mathscr{L}$ как S-модуль изоморфна $S \oplus d\mathcal{O}'$. На последнем этапе доказывается, что построенный ранее изоморфизм модулей в действительности является изоморфизмом алгебр Ли.

5.2. Вычисление групп когомологий специальной алгебры Ли S с коэффициентами в модулях дифференциальных форм

Для выделения подалгебры, фильтрованная деформация которой будет изоморфна S или $S((1+x^{(\delta)})\omega_0)$, нам потребуется описание группы $H^2_{(0)}(S, d\mathcal{O}')$. Более точно, мы установим, что эта группа не более чем одномерна и определим некоторые свойства порождающего ее коцикла. Доказательство разбивается на ряд лемм.

Лемма 10. *Группы $H^2_{(0)}(S,\Omega^1)$, $H^1(S,\Omega^1)$ и $H^0(S,\Omega^1)$ тривиальны.*

Доказательство. Так как модуль Ω^1 является усеченным коиндуцированным, $\Omega^1 \cong \overline{\operatorname{coind}}(\Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1)$, то в силу предложения 20 справедлив сохраняющий градуировку изоморфизм групп когомологий

$$H^2(S,\Omega^1) \cong H^0(\Omega)\otimes H^2(S_{(0)},\Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1)+$$
$$+ H^1(\Omega)\otimes H^1(S_{(0)},\Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1) + H^2(\Omega)\otimes H^0(S_{(0)},\Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1). \quad (5.1)$$

Покажем, что последние два слагаемых в правой части формулы (5.1) тривиальны, для чего вычислим группы $H^0(S_{(0)}, \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1)$ и $H^1(S_{(0)}, \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1)$. Далее трехмерный модуль $\Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1$, порожденный классами элементов dx_i, будем обозначать через M.

Пусть $z = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3 \in S_0 \subset S_{(0)}$. Заметим, что z действует на M тождественно, откуда сразу заключаем, что $H^0(S_{(0)}, M) = \{m \in M | S_{(0)}m = 0\} = = 0$.

Докажем, что группа $H^1(S_{(0)}, M)$ тривиальна. Рассмотрим спектральную последовательность Серра-Хохшильда $\{E_r^{p,q}\}$ для алгебры $S_{(0)}$, идеала $S_{(1)}$ и модуля M. Тогда

$$E_2^{0,1} = H^0(S_{(0)}/S_{(1)}, H^1(S_{(1)}, M)) \cong H^0(S_0, H^1(S_{(1)}, M)),$$
$$E_2^{1,0} = H^1(S_{(0)}/S_{(1)}, H^0(S_{(1)}, M)) \cong H^1(S_0, H^0(S_{(1)}, M)).$$

Так как M — тривиальный $S_{(1)}$-модуль, то $H^0(S_{(1)}, M) = M$ и $H^1(S_{(1)}, M) \cong \cong (S_{(1)}/[S_{(1)}, S_{(1)}])^* \otimes M$. Согласно предложению 8, имеет место изоморфизм S_0-модулей $S_{(1)}/[S_{(1)}, S_{(1)}] \cong S_1 + \langle D_{ik}(x_j^{(p^s)}x_i) | 1 \leqslant i, j, k \leqslant n, 1 \leqslant s < m_j \rangle$, где $D_{ij}(f) = \partial_i f \partial_j - \partial_j f \partial_i$ для $f \in \mathcal{O}$, откуда $H^1(S_{(1)}, M) \cong (S_1 + \langle D_{ik}(x_j^{(p^s)}x_i)\rangle)^* \otimes M$. Таким образом,

$$E_2^{0,1} \cong H^0(S_0, S_1^* \otimes M) + H^0(S_0, \langle D_{ik}(x_j^{(p^s)}x_i)\rangle^* \otimes M),$$
$$E_2^{1,0} \cong H^1(S_0, M).$$

Как отмечалось ранее, действие z на M нетривиально, и из предложения 1 мы делаем вывод о равенстве нулю группы $H^1(S_0, M)$. Итак, $E_2^{1,0} = 0$.

В силу того, что z действует на элементах вида $D_{ik}(x_j^{(p^s)}x_i)$ умножением на -1, то на $\langle D_{ik}(x_j^{(p^s)}x_i)\rangle^* \otimes M$ его действие также равно -1. Следовательно, по предложению 1, $H^0(S_0, \langle D_{ik}(x_j^{(p^s)}x_i)\rangle^* \otimes M) = 0$. Так как модуль коэффициентов $S_1^* \otimes M$ в группе $H^0(S_0, S_1^* \otimes M)$ изоморфен $\mathrm{Hom}_F(S_1, M)$, то $H^0(S_0, S_1^* \otimes M)$ можно отождествить с множеством таких отображений $\varphi \in \mathrm{Hom}_F(S_1, M)$, что

$S_0\varphi = 0$, то есть $H^0(S_0, S_1^* \otimes M) \cong \mathrm{Hom}_{S_0}(S_1, M)$. Из предложения 10 следует, что S_1 — неприводимый S_0-модуль. Размерность S_1 больше размерности M, поэтому модули S_1 и M не изоморфны, а значит, $\mathrm{Hom}_{S_0}(S_1, M) = 0$.

В результате нами показано, что $E_2^{p,q} = 0$ при $p + q = 1$. Так как последовательность $\{E_r^{p,q}\}$, $p + q = 1$, сходится к $H^1(S_{(0)}, M)$, то группа $H^1(S_{(0)}, M)$ тривиальна.

Таким образом из (5.1) следует, что $H^2(S, \Omega^1) \cong H^0(\Omega) \otimes H^2(S_{(0)}, \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1)$. Данный изоморфизм сохраняет градуировку, кроме того, $H^0(\Omega) = F$, поэтому $H^2_{(0)}(S, \Omega^1) \cong H^2_{(0)}(S_{(0)}, \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1) = 0$.

Остается заметить, что тривиальность группы $H^1(S, \Omega^1)$ следует из изоморфизма

$$H^1(S, \Omega^1) \cong H^0(\Omega) \otimes H^1(S_{(0)}, \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1) + H^1(\Omega) \otimes H^0(S_{(0)}, \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1),$$

в котором слагаемые правой части равны нулю. Аналогично, $H^0(S, \Omega^1) \cong$ $\cong H^0(\Omega) \otimes H^0(S_{(0)}, \Omega^1/\mathfrak{m}\Omega^1)$, откуда $H^0(S, \Omega^1) = 0$. Лемма доказана. ■

Лемма 11. *Группы $H^1_{(-1)}(S, \Omega^2)$ и $H^0(S, \Omega^2)$ тривиальны.*

Доказательство. В силу того, что модуль Ω^2 является усеченным коиндуцированным $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$-модулем, мы можем применить формулу для когомологий

$$H^1(S, \Omega^2) \cong H^0(\Omega) \otimes H^1(S_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) + H^1(\Omega) \otimes H^0(S_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2). \qquad (5.2)$$

Поскольку $z = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$ действует на $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$ нетривиально, то $H^0(S_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0$. Тогда, так как изоморфизм в (5.2) сохраняет градуировку и $H^0(\Omega) = F$, то $H^1_{(-1)}(S, \Omega^2) \cong H^1_{(-1)}(S_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2)$. Заметим, что степень $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$ равна -1, поэтому $H^1_{(0)}(S_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0$, а $H^1_{-1}(S_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) \cong$ $\cong H^1_{-1}(S_0, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2)$. Таким образом, $H^1_{(-1)}(S, \Omega^2) \cong H^1_{-1}(S_0, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0$ по предложению 1. Тривиальность $H^0(S, \Omega^2)$ следует из того, что

$$H^0(S, \Omega^2) \cong H^0(S_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2),$$

а элемент $z \in S_0$ действует на $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$ ненулевым образом. Лемма доказана. ■

Лемма 12. $H^0(S, \Omega^3) = H^0_{-1}(S, \Omega^3) = \langle \omega_0 \rangle$.

Доказательство. Так как $\Omega^3 \cong \overline{\mathrm{coind}}(\Omega^3/\mathfrak{m}\Omega^3)$, то, применяя формулу из предложения 20 для модуля $V = \Omega^3/\mathfrak{m}\Omega^3$, получаем

$$H^0(S, \Omega^3) \cong H^0(\Omega) \otimes H^0(S_{(0)}, \Omega^3/\mathfrak{m}\Omega^3).$$

Заметим, что $H^0(\Omega) = F$, откуда $H^0(S, \Omega^3) \cong H^0(S_{(0)}, \Omega^3/\mathfrak{m}\Omega^3)$. Последний изоморфизм сохраняет градуировку.

Модуль $\Omega^3/\mathfrak{m}\Omega^3$ порожден классом элемента ω_0, на котором алгебра S действует тривиально, поэтому $H^0(S_{(0)}, \Omega^3/\mathfrak{m}\Omega^3) = \langle \omega_0 \rangle$, откуда следует утверждение леммы. ■

Следствие 1. *Группа $H^0(S, B^3(\Omega))$ однородна степени -1 и порождена формой объема ω_0.*

Лемма 13. *Группа $H^1_{(-1)}(S, Z^2(\Omega))$ порождена коциклом c''_0 степени 0, определенным условием $c''_0(D) = \mathrm{ad}\, x_1\partial_1(D) \lrcorner \omega_0$ для всех D из S.*

Доказательство. Убедимся, что группа $H^1_{(-1)}(S, Z^2(\Omega))$ одномерна. Рассмотрим точную последовательность

$$\ldots \to H^0_l(S, \Omega^2) \to H^0_l(S, \Omega^2/Z^2(\Omega)) \to H^1_l(S, Z^2(\Omega)) \to H^1_l(S, \Omega^2) \to \ldots, \quad (5.3)$$

соответствующую короткой точной последовательности

$$0 \to Z^2(\Omega) \to \Omega^2 \to \Omega^2/Z^2(\Omega) \to 0.$$

Из леммы 11 следует, что $H^0_l(S, \Omega^2) = 0$ для всех l и $H^1_l(S, \Omega^2) = 0$ при $l \geqslant -1$, откуда $H^0_l(S, \Omega^2/Z^2(\Omega)) \cong H^1_l(S, Z^2(\Omega))$, $l \geqslant -1$. Поскольку отображение $\Omega^2/Z^2(\Omega) \to B^3(\Omega)$ является изоморфизмом S-модулей степени -1, то

$$H^0_{(-2)}(S, B^3(\Omega)) \cong H^0_{(-1)}(S, \Omega^2/Z^2(\Omega)) \cong H^1_{(-1)}(S, Z^2(\Omega)).$$

В силу следствия 1 подгруппа $H^0_{(-2)}(S, B^3(\Omega))$ порождена элементом ω_0 степени -1. Таким образом, группа $H^1_{(-1)}(S, Z^2(\Omega))$, изоморфная группе $H^0(S, B^3(\Omega))$, одномерна и однородна степени 0.

Теперь найдем коцикл, порождающий $H^1_{(-1)}(S, Z^2(\Omega))$. Из предложения 13 известно, что однородное подпространство $H^1_0(S, S)$ порождено дифференцированием $\operatorname{ad} x_1\partial_1$, которое элементу D из S ставит в соответствие $\operatorname{ad} x_1\partial_1(D)$. В силу изоморфизма S-модулей S и $B^2(\Omega)$, элементу $\operatorname{ad} x_1\partial_1(D)$ в свою очередь соответствует элемент $\operatorname{ad} x_1\partial_1(D)\lrcorner\omega_0$ из $B^2(\Omega)$. В результате мы получили коцикл $D \mapsto \operatorname{ad} x_1\partial_1(D)\lrcorner\omega_0$ из $Z^1_0(S, B^2(\Omega))$. Покажем, что он порождает группу $H^1_0(S, Z^2(\Omega))$. Последовательность

$$\ldots \to H^0_0(S, H^2(\Omega)) \to H^1_0(S, B^2(\Omega)) \to H^1_0(S, Z^2(\Omega)) \to \ldots,$$

соответствующая короткой точной последовательности $0 \to B^2(\Omega) \to Z^2(\Omega) \to$ $\to H^2(\Omega) \to 0$, также точна. Поскольку группа $H^0_0(S, H^2(\Omega))$ тривиальна, то отображение $H^1_0(S, B^2(\Omega)) \to H^1_0(S, Z^2(\Omega))$ инъективно. Таким образом, мы имеем некогомологичный нулю коцикл из $H^1_0(S, Z^2(\Omega))$, который на элементе $D \in S$ принимает значение $\operatorname{ad} x_1\partial_1(D)\lrcorner\omega_0$. Его и обозначим через c''_0. Лемма доказана. ■

5.3. Описание коциклов группы $H^2_{(0)}(S, Z^1(\Omega))$

Предложение 23. *Группа $H^2_{(4)}(S, Z^1(\Omega))$ порождена коциклами c_1, c_2, c_3 такими, что*

$$c_k(D_1, D_2) = D_1\lrcorner(\operatorname{ad} x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k(D_2)\lrcorner\omega_0) -$$
$$- D_2\lrcorner(\operatorname{ad} x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k(D_1)\lrcorner\omega_0)$$

для любых $D_1, D_2 \in S$. Здесь $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ и $i < j$.

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to Z^1(\Omega) \to \Omega^1 \to \Omega^1/Z^1(\Omega) \to 0$$

и соответствующую ей точную когомологическую последовательность

$$\ldots \to H^1_{(4)}(S,\Omega^1) \to H^1_{(4)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega)) \xrightarrow{\varphi} H^2_{(4)}(S,Z^1(\Omega)) \to H^2_{(4)}(S,\Omega^1) \to \ldots . \tag{5.4}$$

Из леммы 10 следует, что $H^1_{(4)}(S,\Omega^1) = H^2_{(4)}(S,\Omega^1) = 0$, поэтому связывающий гомоморфизм φ в действительности является изоморфизмом:

$$H^1_{(4)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega)) \cong H^2_{(4)}(S,Z^1(\Omega)). \tag{5.5}$$

Вычислим группу $H^1_{(4)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega))$, изоморфную $H^1_{(3)}(S,B^2(\Omega))$. Из предложения 13 следует, что группа $H^1_{(3)}(S,S)$ порождена дифференцированиями $\operatorname{ad} x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_k$. Откуда, используя изоморфизм S-модулей S и $B^2(\Omega)$, получаем, что группа $H^1_{(3)}(S,B^2(\Omega))$ порождена коциклами c''_k такими, что $c''_k(D) = \operatorname{ad} x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_k(D) \lrcorner \omega_0$ для всех $D \in S$.

Для связывающего гомоморфизма φ, который индуцирует изоморфизм (5.5), рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^1(S,Z^1(\Omega)) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(S,Z^1(\Omega)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^1(S,\Omega^1) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"] & C^2(S,\Omega^1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^1(S,\Omega^1/Z^1(\Omega)) \arrow[r] & C^2(S,\Omega^1/Z^1(\Omega)) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Для каждого отображения c''_k нам нужно выбрать некоторое линейное отображение c'_k из $C^1(S,\Omega^1)$ такое, что $d \circ \alpha \circ c'_k$ совпадает с c''_k с точностью до умножения на ненулевой скаляр. Проверим, что c'_k, определенное формулой

$$c'_k(D) = D \lrcorner x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} dx_i \wedge dx_j,$$

удовлетворяет нужному условию. Действительно,

$$\begin{aligned} d\circ\alpha\circ c'_k(D) &= d(D\lrcorner x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i\wedge dx_j) = \\ &= D\cdot x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i\wedge dx_j = \sigma_{ijk}D\cdot(x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k\lrcorner\omega_0) = \\ &= -\sigma_{ijk}\,\mathrm{ad}\,x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k(D)\lrcorner\omega_0 = -\sigma_{ijk}c''_k(D). \end{aligned}$$

Теперь найдем коциклы c_k, порождающие $H^2_{(4)}(S,Z^1(\Omega))$, как образы c'_k при отображении δ. Имеем

$$\begin{aligned} c_k(D_1,D_2) &= (\delta c'_k)(D_1,D_2) = [D_1,c'_k(D_2)]-[D_2,c'_k(D_1)]-c'_k([D_1,D_2]) = \\ &= D_1\cdot(D_2\lrcorner x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i\wedge dx_j)-D_2\cdot(D_1\lrcorner x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i\wedge dx_j)- \\ &-[D_1,D_2]\lrcorner x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i\wedge dx_j = -D_1\lrcorner D_2\cdot x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i\wedge dx_j+ \\ &+D_2\lrcorner D_1\cdot x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}dx_i\wedge dx_j = D_1\lrcorner(\mathrm{ad}\,x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k(D_2)\lrcorner\omega_0)- \\ &-D_2\lrcorner(\mathrm{ad}\,x_i^{(p^{m_i}-1)}x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k(D_1)\lrcorner\omega_0), \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы. ■

Предложение 24. *Группа $H^2_{(0)}(S,Z^1(\Omega))$ есть прямая сумма групп $H^2_1(S,Z^1(\Omega))$ и $H^2_{(4)}(S,Z^1(\Omega))$. При этом подгруппа $H^2_1(S,Z^1(\Omega))$ порождена классом коцикла c_0, ограничение которого на $S_-\wedge S_-$ равно $\partial_1^*\wedge\partial_2^*\otimes dx_3$.*

Доказательство. В точной последовательности

$$\ldots\to H^1_{(0)}(S,\Omega^1)\to H^1_{(0)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega))\xrightarrow{\varphi} H^2_{(0)}(S,Z^1(\Omega))\to H^2_{(0)}(S,\Omega^1)\to\ldots, \tag{5.6}$$

построенной по короткой точной последовательности

$$0\to Z^1(\Omega)\to\Omega^1\to\Omega^1/Z^1(\Omega)\to 0,$$

члены $H^1_{(0)}(S,\Omega^1)$ и $H^2_{(0)}(S,\Omega^1)$ тривиальны, что следует из леммы 10. Поэтому $H^1_{(0)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega))\cong H^2_{(0)}(S,Z^1(\Omega))$. Согласно предложению 13, группа

$H^1_{(-1)}(S,S)$, изоморфная $H^1_{(0)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega))$, четырехмерна, причем три порождающих ее коцикла имеют степень не меньше 3 и один коцикл — степень 0. Учитывая, что изоморфизм φ из последовательности (5.6) имеет степень -1, получаем $H^1_{(0)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega)) = H^1_1(S,\Omega^1/Z^1(\Omega)) \oplus H^1_{(4)}(S,\Omega^1/Z^1(\Omega))$, а значит, $H^2_{(0)}(S,Z^1(\Omega)) = H^2_1(S,Z^1(\Omega)) \oplus H^2_{(4)}(S,Z^1(\Omega))$.

Соответствующий дифференцированию $\mathrm{ad}\, x_1\partial_1$ из $H^1_0(S,S) = \langle\overline{\mathrm{ad}\, x_1\partial_1}\rangle$, коцикл $c''_0 \in H^1_0(S,B^2(\Omega))$ на элементах D принимает значение $(\mathrm{ad}\, x_1\partial_1(D))\lrcorner\omega_0$. Одномерное подпространство $H^2_1(S,Z^1(\Omega))$ порождено коциклом, который мы обозначим через c_0. Этот коцикл можно найти из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^1(S,Z^1(\Omega)) \arrow[r] \arrow[d] & C^2(S,Z^1(\Omega)) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^1(S,\Omega^1) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\alpha"] & C^2(S,\Omega^1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^1(S,B^2(\Omega)) \arrow[r] & C^2(S,B^2(\Omega)) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

как дифференциал отображения c'_0, которое является прообразом коцикла c''_0. Построим c'_0 на S_-, отрицательной части алгебры S, следующим образом: $c'_0(\partial_1) = -x_2dx_3$, $c'_0(\partial_2) = c'_0(\partial_3) = 0$, далее продолжаем по линейности. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\alpha\circ c'_{0|S_-} = c''_{0|S_-}$. Действительно,

$$(\alpha\circ c'_0)(\partial_1) = d(-x_2dx_3) = -dx_2\wedge dx_3 = \mathrm{ad}\, x_1\partial_1(\partial_1)\lrcorner\omega_0 = c''_0(\partial_1),$$

$$(\alpha\circ c'_0)(\partial_2) = 0 = \mathrm{ad}\, x_1\partial_1(\partial_2)\lrcorner\omega_0 = c''_0(\partial_2),$$

$$(\alpha\circ c'_0)(\partial_3) = 0 = \mathrm{ad}\, x_1\partial_1(\partial_3)\lrcorner\omega_0 = c''_0(\partial_3).$$

Тогда c_0, получаемый как образ c'_0 при отображении δ, определен на пространстве $S_- \wedge S_-$ следующим образом:

$$c_0(\partial_1, \partial_2) = (\delta c_0')(\partial_1, \partial_2) = [\partial_1, c_0'(\partial_2)] - [\partial_2, c_0'(\partial_1)] = -\partial_2(-x_2 dx_3) = dx_3,$$
$$c_0(\partial_1, \partial_3) = (\delta c_0')(\partial_1, \partial_3) = [\partial_1, c_0'(\partial_3)] - [\partial_3, c_0'(\partial_1)] = 0,$$
$$c_0(\partial_2, \partial_3) = (\delta c_0')(\partial_2, \partial_3) = [\partial_2, c_0'(\partial_3)] - [\partial_3, c_0'(\partial_2)] = 0.$$

Откуда видно, что ограничение c_0 на $S_- \wedge S_-$ равно $\partial_1^* \wedge \partial_2^* \otimes dx_3$. ■

Лемма 14. *Вложение $d\mathcal{O}' \to Z^1(\Omega)$ индуцирует вложение группы $H^2_{(0)}(S, d\mathcal{O}')$ в группу $H^2_1(S, Z^1(\Omega)) = \langle c_0 \rangle$, где c_0 — коцикл из предложения 24.*

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \to d\mathcal{O}' \to B^1(\Omega) \to B^1(\Omega)/d\mathcal{O}' \to 0$$

и соответствующую ей точную когомологическую последовательность

$$\ldots \to H^1_{(0)}(S, B^1(\Omega)/d\mathcal{O}') \to H^2_{(0)}(S, d\mathcal{O}') \to$$
$$\to H^2_{(0)}(S, B^1(\Omega)) \xrightarrow{\varphi} H^2_{(0)}(S, B^1(\Omega)/d\mathcal{O}') \to \ldots. \quad (5.7)$$

Заметим, что модуль $B^1(\Omega)/d\mathcal{O}'$ одномерный и порожден классом элемента $dx^{(\delta)}$. Алгебра S на этом модуле действует тривиально, поэтому

$$H^1(S, B^1(\Omega)/d\mathcal{O}') \cong (S/[S, S])^*.$$

Так как S проста, то последнее выражение обращается в нуль. Следовательно, последовательность (5.7) доставляет инъективное отображение

$$H^2_{(0)}(S, d\mathcal{O}') \to H^2_{(0)}(S, B^1(\Omega)). \quad (5.8)$$

Оценим группу $H^2_{(0)}(S, B^1(\Omega))$, рассмотрев короткую точную последовательность

$$0 \to B^1(\Omega) \to Z^1(\Omega) \to H^1(\Omega) \to 0. \quad (5.9)$$

По предложению 7, $H^1(\Omega) = \langle\overline{x_i^{(p^{m_i}-1)}dx_i}|1 \leqslant i \leqslant 3\rangle$ и S-модуль $H^1(\Omega)$ тривиален, что влечет равенство нулю группы $H^1(S, H^1(\Omega))$. Поэтому из точной последовательности, соответствующей последовательности (5.9),

$$\ldots \to H^1_{(0)}(S, H^1(\Omega)) \to H^2_{(0)}(S, B^1(\Omega)) \to H^2_{(0)}(S, Z^1(\Omega)) \to \ldots,$$

следует инъективность отображения $H^2_{(0)}(S, B^1(\Omega)) \to H^2_{(0)}(S, Z^1(\Omega))$.

В результате, нами построено вложение группы $H^2_{(0)}(S, d\mathcal{O}')$ в группу $H^2_{(0)}(S, Z^1(\Omega))$. Для доказательства леммы остается показать, что образ ограничения этого вложения $H^2_{(4)}(S, d\mathcal{O}') \to H^2_{(4)}(S, Z^1(\Omega))$ тривиален.

Проверим, что коциклы $c_t, t = \overline{1,3}$, из предложения 23 в действительности лежат в $Z^2_{(4)}(S, B^1(\Omega))$. Согласно предложению 14, модуль $B^1(\Omega)$ составляют в точности те элементы из Ω^1, значение которых на каждом элементе из $\widetilde{S}$ не содержит слагаемых вида $\alpha x^{(\delta)}$. Поскольку значение $c_t, t = \overline{1,3}$, на произвольных элементах D_1, D_2 из S равно $D_1 \lrcorner (\operatorname{ad} x_u^{(p^{m_u}-1)} x_v^{(p^{m_v}-1)} \partial_t(D_2) \lrcorner \omega_0) - D_2 \lrcorner (\operatorname{ad} x_u^{(p^{m_u}-1)} x_v^{(p^{m_v}-1)} \partial_t(D_1) \lrcorner \omega_0)$, то $c_t(D_1, D_2)$ на элементе $x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_k$ обращается в нуль, а значит, $c_t(D_1, D_2)$ лежит в $B^1(\Omega)$. Таким образом, группа $H^2_{(4)}(S, B^1(\Omega))$ порождена тремя коциклами $c_t, t = \overline{1,3}$ и изоморфна группе $H^2_{(4)}(S, B^1(\Omega))$. Ввиду этого задача свелась доказательству тривиальности вложения $H^2_{(4)}(S, d\mathcal{O}') \to H^2_{(4)}(S, B^1(\Omega))$.

Точная последовательность (5.7) в частности влечет за собой точность последовательности

$$0 \to H^2_{(4)}(S, d\mathcal{O}') \to H^2_{(4)}(S, B^1(\Omega)) \xrightarrow{\varphi'} H^2_{(4)}(S, B^1(\Omega)/d\mathcal{O}') \to \ldots, \tag{5.10}$$

где φ' является ограничением отображения φ из (5.7). Покажем, что $\ker\varphi' = 0$. Предположим, что $\varphi'(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3) = \delta\psi$, где $\psi \in \operatorname{Hom}(S, B^1(\Omega)/d\mathcal{O}')$. Заметим, что $\delta\psi(D_1, D_2) = -\psi([D_1, D_2])$ в силу тривиальности действия S на $\langle\overline{dx^{(\delta)}}\rangle$. Тогда

$$\varphi'(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3)(\partial_i, x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j) = -\psi([\partial_i, x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j]) = 0.$$

С другой стороны, по предложению 23

$$c_t(\partial_i, x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j) = \partial_i \lrcorner (\operatorname{ad} x_u^{(p^{m_u}-1)} x_v^{(p^{m_v}-1)} \partial_t (x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j) \lrcorner \omega_0) -$$
$$- x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j \lrcorner (\operatorname{ad} x_u^{(p^{m_u}-1)} x_v^{(p^{m_v}-1)} \partial_t (\partial_i) \lrcorner \omega_0) = \partial_i \lrcorner (\delta_{tk}(x^{(\delta-\varepsilon_k)}\partial_j - x^{(\delta-\varepsilon_j)}\partial_k) \lrcorner \omega_0) +$$
$$+ x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j \lrcorner ((\delta_{tk} x_i^{(p^{m_i}-2)} x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k + \delta_{jt} x_i^{(p^{m_i}-2)} x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j) \lrcorner \omega_0) =$$
$$= \delta_{tk}(\partial_i \lrcorner ((x^{(\delta-\varepsilon_k)}\partial_j - x^{(\delta-\varepsilon_j)}\partial_k) \lrcorner \omega_0) + x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j \lrcorner (x_i^{(p^{m_i}-2)} x_j^{(p^{m_j}-1)}\partial_k \lrcorner \omega_0)) =$$
$$= -\delta_{tk}\sigma_{ijk} dx^{(\delta)},$$

где $\{u, v, t\} = \{i, j, k\} = 1, 2, 3$. Откуда

$$(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \beta_3 c_3)(\partial_i, x_k^{(p^{m_k}-1)}\partial_j) = -\sigma_{ijk}\beta_k dx^{(\delta)}.$$

Следовательно, $\beta_k = 0$ для $k = 1, 2, 3$, а значит, $\ker \varphi' = 0$. В силу точности последовательности 5.10 это означает, что образ отображения $H^2_{(4)}(S, dO') \to$ $\to H^2_{(4)}(S, B^1(\Omega))$ тривиален.

Таким образом, нами получено вложение группы когомологий $H^2_{(0)}(S, dO')$ в группу $H^2_{(0)}(S, Z^1(\Omega))$. Причем ограничение этого отображения $H^2_{(4)}(S, dO') \to$ $\to H^2_{(4)}(S, Z^1(\Omega))$ тривиально. По предложению 24 группа $H^2_{(0)}(S, Z^1(\Omega))$ является прямой суммой подгрупп $H^2_{(4)}(S, Z^1(\Omega))$ и $H^2_1(S, Z^1(\Omega)) = \langle c_0 \rangle$. Следовательно, имеет место вложение $H^2_{(0)}(S, dO')$ в $H^2_1(S, Z^1(\Omega))$, что завершает доказательство леммы. ■

Следующая лемма устанавливает свойство коцикла c_0 из предложения 24, которое понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 15. *Коцикл c_0 нельзя продолжить до коцикла на алгебре X, то есть не существует такого $c \in Z^2(X, X)$, что $c_{|S \wedge S} = c_0$.*

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что найдется коцикл $c \in Z^2(X, X)$ такой, что $c_{|S \wedge S} = c_0$. Рассмотрим ограничение c_0

на $S_{-1} \wedge S_{-1}$, которое обозначим через $\bar{c}_0, \bar{c}_0 \in Z^2_1(S_{-1}, Z^1(\Omega))$ и ограничение c на $X_- \wedge X_-$, которое обозначим через $\bar{c}, \bar{c} \in Z^2(X_-, X)$. Тогда $\bar{c}_{|S_{-1}\wedge S_{-1}} = \bar{c}_0$.

Заметим, что коцикл c из группы $Z^2(X, X)$ имеет степень 3, а значит, для $\bar{c}$ справедливы включения $\bar{c}(X_{-2}, X_{-2}) \subset X_{-1}$, $\bar{c}(X_{-1}, X_{-1}) \subset X_1$ и $\bar{c}(X_{-2}, X_{-1}) \subset X_0$. Таким образом, мы можем полагать, что

$$
\begin{aligned}
\bar{c}(\partial_1, dx_1) &= \sum_{i\neq j} a_{ij}x_i\partial_j + a_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + a_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3),\\
\bar{c}(\partial_2, dx_1) &= \sum_{i\neq j} b_{ij}x_i\partial_j + b_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + b_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3),\\
\bar{c}(\partial_1, dx_2) &= \sum_{i\neq j} c_{ij}x_i\partial_j + c_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + c_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3),\\
\bar{c}(\partial_2, dx_2) &= \sum_{i\neq j} d_{ij}x_i\partial_j + d_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + d_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3),\\
\bar{c}(dx_1, dx_2) &= \sum_{i<j} e_{ij}(x_i dx_j + x_j dx_i) + \sum_i e_i x_i dx_i.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Кроме того, из предложения 24 следует, что $\bar{c}(\partial_1, \partial_2) = dx_3$ и $\bar{c}(\partial_1, \partial_3) = \bar{c}(\partial_2, \partial_3) = 0$.

В силу того, что $\bar{c}$ является коциклом, то есть выполнено соотношение

$$[x, \bar{c}(y, z)] - [y, \bar{c}(x, z)] + [z, \bar{c}(x, y)] - \bar{c}([x, y], z) + \bar{c}([x, z], y) - \bar{c}([y, z], x) = 0$$

для произвольных $x, y, z \in X_-$, мы получаем следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
[\partial_1, \bar{c}(dx_1, dx_2)] &= [dx_1, \bar{c}(\partial_1, dx_2)] - [dx_2, \bar{c}(\partial_1, dx_1)] - \bar{c}(\partial_1, \partial_3),\\
[\partial_2, \bar{c}(dx_1, dx_2)] &= [dx_1, \bar{c}(\partial_2, dx_2)] - [dx_2, \bar{c}(\partial_2, dx_1)] - \bar{c}(\partial_2, \partial_3),\\
[\partial_1, \bar{c}(\partial_2, dx_1)] - [\partial_2, \bar{c}(\partial_1, dx_1)] &= -[dx_1, \bar{c}(\partial_1, \partial_2)],\\
[\partial_1, \bar{c}(\partial_2, dx_2)] - [\partial_2, \bar{c}(\partial_1, dx_2)] &= -[dx_2, \bar{c}(\partial_1, \partial_2)].
\end{aligned}
$$

Данную систему мы получили, рассматривая не все возможные тройки элементов из X_-, а лишь те, которых нам достаточно для доказательства утверждения: (∂_1, dx_1, dx_2), (∂_2, dx_1, dx_2), $(\partial_1, \partial_2, dx_1)$, $(\partial_1, \partial_2, dx_2)$.

В результате, используя соотношения (5.11), имеем

$$[\partial_1, \sum_{i<j} e_{ij}(x_i dx_j + x_j dx_i) + \sum_i e_i x_i dx_i] = [dx_1, \sum_{i\neq j} c_{ij} x_i \partial_j + c_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) +$$

$$+ c_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)] - [dx_2, \sum_{i\neq j} a_{ij} x_i \partial_j + a_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + a_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)],$$

$$[\partial_2, \sum_{i<j} e_{ij}(x_i dx_j + x_j dx_i) + \sum_i e_i x_i dx_i] = [dx_1, \sum_{i\neq j} d_{ij} x_i \partial_j + d_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) +$$

$$+ d_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)] - [dx_2, \sum_{i\neq j} b_{ij} x_i \partial_j + b_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + b_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)],$$

$$[\partial_1, \sum_{i\neq j} b_{ij} x_i \partial_j + b_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + b_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)] - [\partial_2, \sum_{i\neq j} a_{ij} x_i \partial_j +$$

$$+ a_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + a_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)] = -[dx_1, dx_3],$$

$$[\partial_1, \sum_{i\neq j} d_{ij} x_i \partial_j + d_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + d_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)] - [\partial_2, \sum_{i\neq j} c_{ij} x_i \partial_j +$$

$$+ c_1(x_1\partial_1 - x_2\partial_2) + c_2(x_2\partial_2 - x_3\partial_3)] = -[dx_2, dx_3].$$

Откуда

$$e_{12}dx_2 + e_{13}dx_3 + e_1 dx_1 =$$

$$= -c_{21}dx_2 - c_{31}dx_3 - c_1 dx_1 + a_{12}dx_1 + a_{32}dx_3 - a_1 dx_2 + a_2 dx_2,$$

$$e_{12}dx_1 + e_{23}dx_3 + e_2 dx_2 =$$

$$= -d_{21}dx_2 - d_{31}dx_3 - d_1 dx_1 + b_{12}dx_1 + b_{32}dx_3 - b_1 dx_2 + b_2 dx_2,$$

$$b_{12}\partial_2 + b_{13}\partial_3 + b_1\partial_1 - a_{21}\partial_1 - a_{23}\partial_3 + a_1\partial_2 - a_2\partial_2 = \partial_2,$$

$$d_{12}\partial_2 + d_{13}\partial_3 + d_1\partial_1 - c_{21}\partial_1 - c_{23}\partial_3 + c_1\partial_2 - c_2\partial_2 = -\partial_1.$$

Выписывая коэффициенты при $dx_2, dx_1, \partial_2, \partial_1$ из каждого уравнения, соответственно, получаем

$$e_{12} = -c_{21} - a_1 + a_2, \quad e_{12} = -d_1 + b_{12},$$

$$b_{12} + a_1 - a_2 = 1, \quad d_1 - c_{21} = -1.$$

Откуда

$$-e_{12} - c_{21} = 1 - b_{12},$$
$$c_{21} - 1 = b_{12} - e_{12}.$$

Сложив последние равенства, получим соотношение $-1 = 1$, что невозможно, поскольку характеристика поля равна 3. Таким образом, наше предположение о существовании коцикла $c \in Z^2(X, X)$ такого, что $c_{|S\wedge S} = c_0$ неверно. Лемма доказана. ■

5.4. Выделение специальной подалгебры в фильтрованной деформации $\mathscr{L}$

Следующий этап заключается в выделении в $\mathscr{L}$ подалгебры, изоморфной фильтрованной деформации специальной алгебры S.

Разложим $\mathscr{L}$ в прямую сумму векторных пространств $\{V_i\}$ так, чтобы $\mathscr{L}_{(i)} = V_i \oplus \mathscr{L}_{(i+1)}$. Так как $\mathrm{gr}\,\mathscr{L} \cong X$, то существует изоморфизм векторных пространств $\lambda\colon X \to \mathscr{L}$, удовлетворяющий условиям $\lambda(X_i) = V_i$ и $\mathrm{gr} \circ \lambda = \mathrm{Id}_X$. Тогда операция умножения в $\mathscr{L}$ допускает следующее представление:

$$[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0} \mu_r(u, v),$$

где $u \in X_i, v \in X_j$ и $\mu_r \in \mathrm{Hom}(X \wedge X, \oplus_i V_i)_r$ — однородное отображение степени r. Запишем произведение трех элементов $u \in X_i$, $v \in X_j$, $w \in X_k$:

$$\begin{aligned}
[[\lambda(u), \lambda(v)], \lambda(w)] &= [\lambda([u, v]), \lambda(w)] + \sum_{r>0} [\mu_r(u, v), \lambda(w)] = \\
&= \lambda([[u, v], w]) + \sum_{r>0} \mu_r([u, v], w) + \sum_{r>0} \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(u, v), w]) + \\
&\qquad + \sum_{r>0} \sum_{s>0} \mu_r(\lambda^{-1} \circ \mu_s(u, v), w).
\end{aligned}$$

Теперь мы можем записать однородную составляющую степени $i+j+k+r$ тождества Якоби для $u \in X_i$, $v \in X_j$, $w \in X_k$:

$$\mu_r([u,v],w)+\mu_r([v,w],u)+\mu_r([w,u],v)+\lambda([\lambda^{-1}\circ\mu_r(u,v),w])+\\ +\lambda([\lambda^{-1}\circ\mu_r(v,w),u])+\lambda([\lambda^{-1}\circ\mu_r(w,u),v])+\\ +\sum_{t=1}^{r-1}(\mu_{r-t}(\lambda^{-1}\circ\mu_t(u,v),w)+\mu_{r-t}(\lambda^{-1}\circ\mu_t(v,w),u)+\\ +\mu_{r-t}(\lambda^{-1}\circ\mu_t(w,u),v))=0. \quad (5.12)$$

Данными обозначениями мы будем пользоваться в дальнейшем, возможно, изменяя, выбор пространств V_i и отображения λ.

Лемма 16. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры X. Тогда $\mathscr{L}$ содержит подалгебру $\mathcal{S}$, изоморфную либо S, либо $S((1+x^{(\delta)})\omega_0)$.*

Доказательство. Покажем, что пространства V_i могут быть выбраны таким образом, чтобы $\mu_r(S\wedge S)=0$ для всех нечетных r. Доказательство проведем индукцией по r. Пусть утверждение выполнено для $r\leqslant l$, $r\not\equiv 0 \mod (2)$. Не нарушая общности, мы можем считать, что l четно, $l=2t$. Установим, что тогда утверждение выполнено для $r=l+1$. Из индукционного предположения мы заключаем, что для $u\in S_i, v\in S_j, w\in S_k$ сумма

$$\sum_{t=1}^{r-1}(\mu_{r-t}(\lambda^{-1}\circ\mu_t(u,v),w)+\mu_{r-t}(\lambda^{-1}\circ\mu_t(v,w),u)++\mu_{r-t}(\lambda^{-1}\circ\mu_t(w,u),v))$$

тривиальна. Тогда, обозначив через φ_r композицию $\lambda^{-1}\circ\mu_r$, из выражения (5.12) мы получаем

$$\varphi_r([u,v],w)+\varphi_r([v,w],u)+\varphi_r([w,u],v)+[\varphi_r(u,v),w]+[\varphi_r(v,w),u]+[\varphi_r(w,u),v]=0.$$

Это в точности означает, что $\varphi_r\in Z^2(S,dO')$ — однородный коцикл, причем его степень как степень отображения из $\mathrm{Hom}(X\wedge X,X)$ равна r, а значит, в

$Z^2(S, dO')$ он имеет степень $(r-1)/2 = t \geqslant 0$. То есть $\varphi_r \in Z^2_t(S, dO')$. Из леммы 14 следует, что группа $H^2_{(0)}(S, dO')$ либо тривиальна, либо порождена коциклом степени 1, когомологичным c_0, поэтому φ_r может быть пропорциональным c_0 лишь при $r = 3$. Заметим, что алгебра X содержит элемент $z = x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$, который действует на коцикл степени i умножением на $-i$. С другой стороны, действие алгебры на группу когомологий $H^2(X, X)$ тривиально, откуда $H^2(X, X) = \oplus_{k\equiv 0(3)} H^2_k(X, X)$, поэтому мы можем считать, что $\varphi_3 \in Z^2_3(X, X)$. Но тогда, в силу леммы 15, φ_r не пропорционален никакому коциклу, когомологичному c_0. Таким образом, φ_r когомологичен нулю, то есть существует однородное линейное отображение $\psi_r\colon S \to dO'$ степени t такое, что $\varphi_r = \delta\psi_r$. Последнее можно записать как

$$\varphi_r(u, v) = [u, \psi_r(v)] - [v, \psi_r(u)] - \psi_r([u, v]),\ u, v \in S.$$

Выберем подпространства V'_i и отображение $\lambda'\colon X \to \mathscr{L}$ так, что $V'_{2i} = (\mathrm{Id} - \lambda \circ \psi_r \circ \lambda^{-1})V_{2i}$, $V'_{2i+1} = V_{2i+1}$ и $\lambda'_{|S} = \lambda_{|S} - \lambda \circ \psi_r$, $\lambda'_{|dO'} = \lambda_{|dO'}$. Тогда

$$\begin{aligned}
[\lambda'(u), \lambda'(v)] &\equiv [\lambda(u) - \lambda \circ \psi_r(u), \lambda(v) - \lambda \circ \psi_r(v)] \equiv \\
&\equiv [\lambda(u), \lambda(v)] - [\lambda \circ \psi_r(u), \lambda(v)] - [\lambda(u), \lambda \circ \psi_r(v)] \equiv \\
&\equiv \lambda([u, v]) + \sum_{t \leqslant r} \mu_t(u, v) - \lambda([\psi_r(u), v]) - \lambda([u, \psi_r(v)]) \equiv \\
&\equiv \lambda([u, v]) + \mu_r(u, v) - \lambda \circ \varphi_r(u, v) - \lambda \circ \psi_r([u, v]) \equiv \\
&\equiv \lambda'([u, v]) \mod (\mathscr{L}_{2i+2j+r+1}).
\end{aligned}$$

Шаг индукции выполнен. Таким образом, $\mu_r(S \wedge S) = 0$ для нечетных r.

Далее мы будем считать, что пространства V_i изначально выбраны так, что $\mu_r(S \wedge S) = 0$. Другими словами это означает, что $[\oplus V_{2i}, \oplus V_{2i}] \subset \oplus V_{2i}$, то есть $\mathcal{S} = \oplus V_{2i}$ — подалгебра в $\mathscr{L}$. Так как $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация X, то из выбора пространств V_i следует, что $\mathcal{S}$ — фильтрованная деформация S, откуда заключаем, что либо $\mathcal{S} \cong S$, либо $\mathcal{S} \cong S((1 + x^{(\delta)})\omega_0)$. Лемма доказана.■

5.5. Исследование $\mathscr{L}$ как $\mathcal{S}$-модуля

Далее, как в доказательстве последней леммы, через $\mathcal{S}$ мы будем обозначать специальную алгебру Ли картановского типа S или $S((1 + x^{(\delta)})\omega_0)$, изоморфную построенной ранее подалгебре в деформации $\mathscr{L}$. Пусть $\mathcal{X}$ — это та из алгебр X или $X((1 + x^{(\delta)})\omega_0)$, которая содержит подалгебру $\mathcal{S}$. Тогда $\mathcal{X}_{\bar{0}}$ и $\mathcal{X}_{\bar{1}}$ — однородные пространства $\mathbb{Z}_2$-градуировки. В частности, $\mathcal{X}_{\bar{0}} = \mathcal{S}$. Соответствие $(1 - x^{(\delta)})\partial_i \mapsto \partial_i$, $(1 - x^{(\delta)})\mathrm{d}x_i \mapsto \mathrm{d}x_i$ и $u \mapsto u$ для остальных элементов определяет изоморфизм векторных пространств $\theta\colon X((1 + x^{(\delta)})\omega_0) \to X$. Положим $\rho = \lambda$, если $\mathcal{X} = X$ и $\rho = \lambda\circ\theta$ в противном случае. Тогда мы можем считать, что пространства V_i в $\mathscr{L}$ выбраны так, что $\rho(\mathcal{X}_{(2i)}) = V_{2i} \oplus \rho(\mathcal{X}_{(2i+1)})$, $i \geqslant -1$.

Лемма 16 позволяет рассматривать фильтрованную деформацию $\mathscr{L}$ как $\mathcal{S}$-модуль. Следующее утверждение показывает, что подмодуль $\mathcal{S}$ является прямым слагаемым в $\mathscr{L}$, а дополнительное к нему слагаемое в точности изоморфно $\mathcal{S}$-модулю $\mathcal{X}_{\bar{1}}$.

Лемма 17. *Имеет место изоморфизм $\mathcal{S}$-модулей $\mathscr{L}$ и $\mathcal{X}$.*

Доказательство. Напомним, что $\widehat{\mathcal{S}}_{(0)} = \mathcal{S}_{(0)} + \langle u_1, u_2, u_3\rangle$, где $u_i \in N_{\mathcal{S}^\sharp}(\mathcal{S}_{(0)})$. Более того, из предложений 17 и 18 следует, что элементы u_i лежат в центре универсальной обертывающей алгебры для $\mathcal{S}$, то есть $\operatorname{ad} u_i(\mathcal{S}) = 0$.

Чтобы установить справедливость утверждения леммы, мы воспользуемся универсальным свойством коиндуцированных модулей. Для этого нам необходимо проверить, что факторы $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}, \mathscr{L}/\mathscr{L}_{(-1)}$ и $\mathscr{L}_{(-1)}/\mathscr{L}_{(0)}$ являются $\widehat{\mathcal{S}}_{(0)}$-модулями и что $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}$ раскладывается в прямую сумму модулей $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(-1)}$ и $\mathscr{L}_{(-1)}/\mathscr{L}_{(0)}$. На самом деле нам достаточно показать, что $\operatorname{ad} u_i(\mathscr{L}) = 0$, тогда последние условия будут выполнены автоматически.

Поскольку $\operatorname{ad} u_i(\mathcal{S}) = 0$, то отображение $\operatorname{ad} u_i\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}$ является гомоморфизмом $\mathcal{S}$-модулей и индуцирует гомоморфизм $\beta_i\colon \mathscr{L}/\mathcal{S} \to \mathscr{L}$. Заметим, что

$\operatorname{im}\beta_i \cap \mathcal{S}$ является идеалом в $\mathcal{S}$, так как для произвольного $x \in \operatorname{im}\beta_i \cap \mathcal{S}$ и $D \in \mathcal{S}$ имеем $[D, x] = [D, \beta_i(y)] = \beta_i([D, y]) \in \operatorname{im}\beta_i \cap \mathcal{S}$. Тогда, в силу того, что алгебра $\mathcal{S}$ проста, $\operatorname{im}\beta_i \cap \mathcal{S} = 0$ или $\operatorname{im}\beta_i \supset \mathcal{S}$. Последний вариант невозможен, поскольку с одной стороны $\dim \operatorname{im}\beta_i \leqslant \dim d\mathcal{O}' = p^{m_1+m_2+m_3} - 2$, а с другой — $\dim \operatorname{im}\beta_i \geqslant \dim \mathcal{S} = 2(p^{m_1+m_2+m_3} - 1)$. Таким образом, $\operatorname{im}\beta_i \cap \mathcal{S} = 0$, а значит, β_i индуцирует отображение $\mathcal{S}$-модулей $\bar{\beta}_i : \mathscr{L}/\mathcal{S} \to \mathscr{L}/\mathcal{S}$.

Так как модуль $\operatorname{gr}(\mathscr{L}/\mathcal{S}) \cong d\mathcal{O}'$ неприводим, то $\mathscr{L}/\mathcal{S}$ также является неприводимым $\mathcal{S}$-модулем. Тогда по лемме Шура $\bar{\beta}_i = a_i \operatorname{Id}$ для некоторого $c_i \in F$.

Разложим $\mathscr{L}$ на весовые подпространства относительно $\operatorname{ad} u_i$. Из приведенных выше рассуждений следует, что оператор $\operatorname{ad} u_i$ имеет не более 2-х собственных значений: 0 и a_i. Предположим, что $a_i \neq 0$ тогда $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_{a_i}$. Поскольку $[\mathscr{L}_{a_i}, \mathscr{L}_{a_i}] \subseteq \mathscr{L}_{2a_i}$, а других собственных значений, кроме 0 и a_i, у $\operatorname{ad} u_i$ нет, то $\mathscr{L}_{a_i}$ — собственный идеал в $\mathscr{L}$. Последнее означает, что $\operatorname{gr}(\mathscr{L}_{a_i})$ также является собственным идеалом в алгебре X. Полученное противоречие с простотой алгебры X доказывает, что $a_i = 0$, то есть оператор $\operatorname{ad} u_i$ действует на $\mathscr{L}$ тривиально.

Теперь мы можем записать коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\overline{\operatorname{coind}}(\mathcal{X}/\mathcal{X}_{(-1)} \oplus \mathcal{X}_{(-1)}/\mathcal{X}_{(0)}) \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{X}/\mathcal{X}_{(-1)} \oplus \mathcal{X}_{(-1)}/\mathcal{X}_{(0)}, \\
\mathscr{L} \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.13}$$

где отображение π — это композиция канонической проекции $\mathscr{L} \to \mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)}$ и изоморфизма $\mathscr{L}/\mathscr{L}_{(0)} \to \mathcal{X}/\mathcal{X}_{(-1)} \oplus \mathcal{X}_{(-1)}/\mathcal{X}_{(0)}$. В $\overline{\operatorname{coind}}(\mathcal{X}/\mathcal{X}_{(-1)})$ неприводимый $\mathcal{S}$-подмодуль — это $\mathcal{S}$, а в $\overline{\operatorname{coind}}(\mathcal{X}_{(-1)}/\mathcal{X}_{(0)})$ неприводимым $\mathcal{S}$-подмодулем является $\mathcal{M}$, который в зависимости от вида $\mathcal{S}$ равен либо $d\mathcal{O}'$, либо $d\mathcal{O}'_{1-x^{(\delta)}}$. Тогда отображение ψ, очевидно, отображает $\mathscr{L}$ на прямую сумму модулей $\mathcal{S} \oplus \mathcal{M}$. Сравнивая размерности, убеждаемся, что имеет место изоморфизм $\mathcal{S}$-модулей

$\mathscr{L}$ и $\mathcal{S} \oplus \mathcal{M} \cong \mathcal{X}$. Лемма доказана. ■

Из последней леммы непосредственно вытекает, что подалгебра $\mathcal{S}$ алгебры $\mathscr{L}$ не может быть изоморфна $S((1+x^{(\delta)})\omega_0)$, то есть имеет место следующее следствие.

Следствие 2. *Фильтрованная деформация $\mathscr{L}$ алгебры X содержит подалгебру S. S-модули $\mathscr{L}$ и X изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ — подмодуль из леммы 17, изоморфный либо $d\mathcal{O}'$, либо $d\mathcal{O}'_{1-x^{(\delta)}}$ в зависимости от вида $\mathcal{S}$. Тогда выполнено неравенство $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{M} \leqslant \dim \mathscr{L}$. Однако, если $\mathcal{S} = S((1 + x^{(\delta)})\omega_0)$, то $\dim \mathcal{M} = \dim d\mathcal{O}'_{1-x^{(\delta)}} = \dim d\mathcal{O}' + 1$, и, следовательно, $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{M} > \dim \mathscr{L}$, что невозможно. В случае $\mathcal{S} = S$ имеет место равенство размерностей $\mathscr{L}$ и X, тогда гомоморфизм ψ из коммутативной диаграммы (5.13) задает изоморфизм S-модулей $\mathscr{L}$ и $X = S \oplus d\mathcal{O}'$. ■

5.6. Доказательство жесткости простой градуированной алгебры Ли типа X

В предыдущем параграфе мы показали, что фильтрованная деформация $\mathscr{L}$ алгебры X содержит подалгебру, изоморфную S, поэтому мы можем считать, что введенные ранее изоморфизмы векторных пространств ρ и λ совпадают. Кроме того, $\mathscr{L}$ и X изоморфны как S-модули, и этот изоморфизм устанавливает отображение λ. Покажем теперь, что λ является изоморфизмом алгебр Ли.

Теорема 5. *Пусть $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация алгебры Ли X. Тогда $\mathscr{L}$ изоморфна алгебре X.*

Доказательство. Лемма 16 и следствие 2 позволяет сделать вывод о том, что

$$\lambda([u,v]) = [\lambda(u), \lambda(v)], \tag{5.14}$$

если $u \in X_{\bar{0}}$, $v \in X$. Таким образом, чтобы доказать изоморфность алгебр Ли $\mathscr{L}$ и X, нужно проверить равенство (5.14) для $u, v \in X_{\bar{1}}$. Пусть

$$[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u,v]) + \sum_{r>0} \nu_r(u,v),$$

где $\nu_r \in \mathrm{Hom}(X_{\bar{1}} \wedge X_{\bar{1}}, \mathscr{L})_r$. Тогда для $w \in X_{\bar{0}}$ имеем

$$[[\lambda(w), \lambda(u)], \lambda(v)] = [\lambda([w,u]), \lambda(v)] = \lambda([[w,u],v]) + \sum_{r>0} \nu_r([w,u],v),$$

$$[[\lambda(u), \lambda(v)], \lambda(w)] = [\lambda([u,v]) + \sum_{r>0}(u,v), \lambda(w)] = \lambda([[u,v],w]) +$$
$$+ \sum_{r>0} \lambda([\lambda^{-1} \circ \nu_r(u,v), w]),$$

$$[[\lambda(v), \lambda(w)], \lambda(u)] = [\lambda([v,w]), \lambda(u)] = \lambda([[v,w],u]) + \sum_{r>0} \nu_r([v,w],u).$$

Откуда следует, что тождество Якоби для элементов u, v, w влечет равенство

$$[w, \lambda^{-1} \circ \nu_r(u,v)] = \lambda^{-1} \circ \nu_r([w,u],v) + \lambda^{-1} \circ \nu_r(u,[w,v]). \tag{5.15}$$

Обозначим $\lambda^{-1} \circ \nu_r$ через γ_r. Очевидно, что если $\gamma_r \equiv 0$, то λ — изоморфизм алгебр Ли.

Покажем, что $\gamma_r \equiv 0$. Предположим противное: пусть $\gamma_r(u,v) \neq 0$ для некоторых $u, v \in X_{\bar{1}}$. Для удобства будем считать, что u, v — мономы в X степени $2i+1$ и $2j+1$ соответственно. Выберем неотрицательные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ так, чтобы $\mathrm{ad}\,\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\partial_3^{\alpha_3}(\gamma_r(u,v)) \in X_{-2} \oplus X_{-1}$, то есть $2(i+j)+r+3 \leqslant 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \leqslant$ $\leqslant 2(i+j)+r+4$, и $\mathrm{ad}\,\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\partial_3^{\alpha_3}(\gamma_r(u,v)) \neq 0$. Из (5.15) следует, что

$$\sum_{t_1=0}^{\alpha_1}\sum_{t_2=0}^{\alpha_2}\sum_{t_3=0}^{\alpha_3}\binom{\alpha_1}{t_1}\binom{\alpha_2}{t_2}\binom{\alpha_3}{t_3}\gamma_r(\mathrm{ad}\,\partial_1^{t_1}\partial_2^{t_2}\partial_3^{t_3}(u), \mathrm{ad}\,\partial_1^{\alpha_1-t_1}\partial_2^{\alpha_2-t_2}\partial_3^{\alpha_3-t_3}(v)) \in X_{-2} \oplus X_{-1}, \tag{5.16}$$

причем хотя бы одно из слагаемых нетривиально. Выполнение последнего условия возможно, только если $2(t_1+t_2+t_3) \leqslant 2i+2$ и $2(\alpha_1-t_1+\alpha_2-t_2+\alpha_3-t_3) \leqslant \leqslant 2j+2$. Тогда $2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \leqslant 2(i+j)+4$. и, учитывая ограничения на выбор чисел α_i, мы имеем неравенство $2(i+j)+r+3 \leqslant 2(i+j)+4$. Откуда $r=1$, так как в противном случае все слагаемые в (5.16) тривиальны, что противоречит предположению. Следовательно, $\gamma_r \equiv 0$ при $r>1$.

Пусть $r=1$, тогда мы можем считать, что аргументы γ_r в правой части выражения (5.16) лежат в X_{-1}. Пусть $\gamma_r(dx_i, dx_j) = \sum_t \beta^t_{ij} dx_t$, причем хотя бы один из коэффициентов β^t_{ij} нетривиален. Применим формулу (5.15) для $w = = x_i\partial_j, u = dx_i, v = dx_j$, $i \neq j$, тогда

$$\beta^j_{ij} dx_i = \gamma_r(dx_i, dx_i) = 0.$$

В силу антисимметричности $\beta^i_{ij} = 0$. Пусть теперь $w = x_i\partial_k$, $k \neq i, k \neq j$. Имеем:

$$\beta^k_{ij} dx_i = \gamma_r([x_i\partial_k, dx_i], dx_j) + \gamma_r(dx_i, [x_i\partial_k, dx_j]) = 0.$$

Таким образом, мы заключаем, что все коэффициенты β^t_{ij} тривиальны, что противоречит предположению. Следовательно, $\gamma_r \equiv 0$ для всех $r>0$. Это означает, что λ определяет изоморфизм алгебр Ли X и $\mathscr{L}$. Теорема доказана.■

Литература

1. Benkart G., Kostrikin A. I., Kuznetsov M. I. Finite-dimensional simple Lie algebras with a nonsingular derivation // J. Algebra. 1995. Vol. 171. Pp. 894–916.

2. Block R. E., Wilson R. L. The restricted simple Lie algebras are of classical or Cartan type // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. Vol. 81, no. 16. Pp. 5271–5274.

3. Block R. E., Wilson R. L. Classification of restricted simple Lie algebras // J. Algebra. 1988. Vol. 114, no. 1. Pp. 115–259.

4. Brown G. E. A class of simple Lie algebras of characteristic three // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 107, no. 4. Pp. 901–905.

5. Brown G. E. On the structure of some Lie algebras of Kuznetsov // Michgan Math. J. 1992. Vol. 39, no. 1. Pp. 85–90.

6. Brown G. E. Families of simple Lie algebras of characteristic two // Commun. Algebra. 1995. Vol. 23, no. 3. Pp. 941–954.

7. Frank M. A new simple Lie algebra of characteristic three // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 38. Pp. 43–46.

8. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras // Ann. Math. 1964. Vol. 79, no. 1. Pp. 59–103.

9. Hochschild G., Serre J.-P. Cohomology of Lie algebras // Ann. Math. 1953. Vol. 57, no. 2. Pp. 591–603.

10. Kuznetsov M. I. On Lie algebras of contact type // Commun. Algebra. 1990. Vol. 18, no. 9. Pp. 2943–30013.

11. Kuznetsov M. I. The Melikyan algebras as Lie algebras of the type G_2 // Commun. Algebra. 1991. Vol. 19, no. 4. Pp. 1281–1312.

12. Skryabin S. M. Modular Lie algebras of Cartan type over algebraically non-closed fields // Commun. Algebra. 1991. Vol. 19, no. 6. Pp. 195–224.

13. Skryabin S. M. Group schemes and rigidity of algebras in positive characteristic // Journal of pure and applied algebra. 1995. Vol. 105. Pp. 195–224.

14. Strade H. Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2004. Vol. 38 of de Gruyter Expositions in Mathematics.

15. Strade H., Farnsteiner R. Modular Lie algebras and their representations. New York: Marcel Dekker, 1988. Vol. 116 of Monogr. textbooks.

16. Wilson R. L. Automorphisms of graded Lie algebras of Cartan type // Commun. Algebra. 1975. Vol. 3, no. 7. Pp. 591–613.

17. Wilson R. L. A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic // J. Algebra. 1976. Vol. 40. Pp. 1629–1741.

18. Целоусов М. Ю. Дифференцирования алгебр Ли картановского типа // Изв. вузов. Матем. 1970. № 7. С. 126–134.

19. Джумадильдаев А. С. Деформации алгебр Ли $W_n(m)$ // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 2. С. 168–186.

20. Ермолаев Ю. Б. О семействе простых алгебр Ли над полем характеристики 3 // V Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тез. сообщ. Новосибирск: 1982. С. 52–53.

21. Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. Москва: Наука, 1984.

22. Гийемин В., Штернберг Ш. Алгебраическая модель транзитивной дифференциальной геометрии // Математика. 1966. Т. 10, № 4. С. 3–31.

23. Гишарде А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. Москва: Наука, 1984.

24. Кац В. Г. Глобальные псевдогруппы Картана и простые алгебры Ли характеристики p // УМН. 1971. Т. 26, № 3. С. 199–200.

25. Кац В. Г. Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1974. Т. 38, № 4. С. 800–834.

26. Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. Москва: Иностранная литература, 1960.

27. Кириллов С. А. Специальная алгебра Ли картановского типа: Препринт 247. Горький: Ин-т прикл. физ. АН СССР, 1989.

28. Кириллов С. А., Кузнецов М. И. Гамильтоновы дифференциальные формы над алгеброй срезанных многочленов // УМН. 1986. Т. 41, № 2. С. 205–206.

29. Кириллов С. А., Кузнецов М. И. Контактные формы над алгеброй срезанных многочленов: Препринт 151. Горький: Ин-т прикл. физ. АН СССР, 1986.

30. Кострикин А. И., Кузнецов М. И. О деформациях классических алгебр Ли характеристики три // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 3. С. 299–301.

31. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Псевдогруппы Картана и p-алгебры Ли // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 4. С. 740–742.

32. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. Градуированные алгебры Ли конечной характеристики // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1969. Т. 33, № 2. С. 251–322.

33. Крылюк Я. С. О неприводимых модулях алгебр Ли картановского типа в конечной характеристике, ч. I, II, III // Деп. в ВИНИТИ. 1978. № 3863–78, 3864–78, 3865–78.

34. Крылюк Я. С. О максимальной размерности неприводимых представлений простых p-алгебр Ли картановских серий S и H // Матем. сб. 1984. Т. 123, № 1. С. 108–119.

35. Кузнецов М. И. Распределения над алгеброй срезанных многочленов // Матем. сб. 1988. Т. 136, № 2. С. 187–205.

36. Кузнецов М. И. Классификация простых градуированных алгебр Ли с неполупростой компонентой L_0 // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 2. С. 147–158.

37. Кузнецов М. И. Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53, № 3. С. 557–589.

38. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Франк // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. 2006. Т. 34. С. 148–149.

39. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии R // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева. Тез. докл. Санкт-Петербург: 2007. С. 48–49.

40. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии R // Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В.Е. Воскресенского. Тез. докл. Самара: 2007. С. 35–36.

41. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. 2007. Т. 36. С. 140–141.

42. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии *Y* // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 5. С. 135–140.

43. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Ли серии Y // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша. Тез. докл. Москва: 2008. С. 153.

44. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Франк // Изв. вузов. Матем. 2009. № 8. С. 53–56.

45. Ладилова А. А. Фильтрованные деформации исключительных простых алгебр Ли характеристики 3 // Летняя школа-конференция Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов. Тез. докл. Самара: 2009. С. 32–33.

46. Скрябин С. М. Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней // Матем. сб. 1990. Т. 181, № 1. С. 114–133.

47. Скрябин С. М. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3 // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 3–22.

48. Тюрин С. А. Классификация деформаций специальной алгебры Ли картановского типа // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 6. С. 847–857.