УДК 512.554

ПРО СТУПІНЬ РОЗВ'ЯЗНОСТІ СУМИ ДВОХ НІЛЬПОТЕНТНИХ АЛГЕБР ЛІ

А.П.Петравчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
E-mail: aptr@mechmat.univ.kiev.ua

Доведено, що ступінь розв'язності алгебри Лі над полем характеристики $\neq 2$, яка розкладається в суму абелевої та нільпотентної класу 2 підалгебр не перевищує 10. Над довільним полем характеристики $p=2$ побудовано розв'язні алгебри Лі довільного наперед заданого ступеня розв'язності ≥ 2 виду $L=A+B$ з абелевою підалгеброю A та нільпотентною класу 2 підалгеброю B..

При вивченні суми $L=A+B$ двох нільпотентних алгебр Лі A і B виникають наступні природні питання: чи є така сума розв'язною і чи буде для ступеня розв'язності $s(L)$ алгебри L (якщо L розв'язна) справедлива оцінка $s(L)\leq c(A)+c(B)$ де $c(A)$ і $c(B)$ - класи нільпотентності доданків A і B відповідно ? Ці питання поставлені О.Кегелем (див., наприклад, [1], питання 5.17) і розв'язанню першого з них в різних часткових випадках присв'ячена значна кількість робіт різних авторів. Друге питання майже не вивчалось, лише було відомо, що сума двох абелевих алгебр Лі розв'язна ступеня не вищого ніж 2 (див. [2]). Мета даної роботи - вказати оцінку для ступеня розв'язності алгебри Лі L над полем характеристики $\neq 2$ (не обов'язково скінченновимірної), яка розкладається в суму $L=A+B$ абелевої підалгебри A і нільпотентної класу 2 підалгебри B та довести, що такої оцінки не існує для розв'язних алгебр Лі L виду $L=A+B$ з нільпотентними підалгебрами A і B над довільним полем характеристики $p=2$. Відзначимо, що аналогічні питання про існування оцінок для добутків двох нільпотентних груп поки що в загальному випадку залишаються відкритими (невідомо навіть, чи обмежений ступінь розв'язності скінченної p-групи, яка є добутком абелевої та нільпотентної класу 2 підгрупи) і тому отримані результати можуть виявитись корисними при вивченні груп з факторизаціями.

В роботі використовуються стандартні позначення, добутки лівонормовані. Алгебри Лі (не обов'язково скінченновимірні) розглядаються лише над полями. Якщо U, V - підмножини алгебри Лі над полем K, то через $[U, V]$ позначається K-підпростір, який складається з K-лінійних комбінацій елементів виду $[u, v]$, $u\in U$, $v\in V$. Для K-підпростору $X\subseteq L$ позначимо

$$X^1=X,\ X^2=[X, X],\ \ldots, X^n=[X^{n-1}, X],\ n>2.$$

Через $s(L)$ позначатимемо ступінь розв'язності розв'язної алгебри Лі L, через $c(L)$ - клас нільпотентності нільпотентної алгебри Лі L.

Доведенню теорем передують дві леми технічного характеру, в другій з них використано один з результатів роботи [3], де була доведена розв'язність алгебри Лі над довільним полем характеристики $\neq 2$, яка розкладається в суму абелевої та нільпотентної підалгебр.

Лема 1. Якщо алгебра Лі L над полем K розкладається в суму $L=A+B$ абелевої підалгебри A і нільпотентної класу 2 підалгебри B, то K-підпростори

$$I_1=[A, B^2]+B^2 \ \text{ і } \ I_2=[A, B]+B$$

є підалгебрами з L, підалгебра I_1 є ідеалом в I_2 і фактор-алгебра I_2/I_1 розв'язна ступеня ≤ 2.

Доведення. Із співвідношень

$$[[A, B^i], [A, B^j]]\subseteq [A, B^{i+1}]+ [A, B^{j+1}]+ [A, B^{i+j}, L]+B^2, \qquad (1)$$

$$[A, B^i, B]\subseteq [A, B^i]+B^2, \qquad (2)$$

які отримані в роботі [4], випливає, що виконуються включення

$$[[A, B^2], [A, B^2]]\subseteq B^2, \qquad (3)$$

$$[[A, B^2], [A, B]] \subseteq [A, B^2]+B^2 \qquad (4)$$

Оскільки $[[A, B^2], B^2] \subseteq [A, B^2]$, то із співвідношення (3) отримаємо, що $[I_1, I_1] \subseteq I_1$, тобто I_1 - підалгебра із L. Далі, комутант $L'=[A, B]+B^2$ міститься в K-підпросторі I_2 і тому I_2 - підалгебра (і навіть ідеал) алгебри L. Покажемо, що I_1 - ідеал підалгебри I_2. Дійсно,

$$[[I_1, [A, B]] \subseteq [[A, B^2]+B^2, [A, B]] \subseteq I_1$$

з огляду на співвідношення (4) і з врахуванням включення

$$[A, B, B^2] \subseteq [A+B, B^2]=[A, B^2].$$

Крім того, очевидно, виконується співвідношення $[I_1, B] \subseteq I_1$ і тому $[I_1, I_2] \subseteq I_1$, тобто I_1 - ідеал підалгебри I_2.

Підалгебра I_2 , як неважко переконатись, може бути записана у вигляді $I_2=A_0+B$, де $A_0= I_2 \cap A$. При цьому ідеал I_1 із L містить B^2 і тому фактор-алгебра I_2/I_1 є сумою двох абелевих підалгебр $A_0+ I_1/ I_1$ і $B+ I_1/ I_1$. В силу результатів роботи [2] звідси випливає, що I_2/I_1 – розв'язна ступеня ≤ 2. Лема доведена.

Лема 2. Нехай алгебра Лі L над полем K характеристики $\neq 2$ розкладається в суму $L=A+B$ абелевої підалгебри A і нільпотентної класу *2* підалгебри B. Якщо для деякого K-підпростору N із L виконуються співвідношення

$$L=N+B,\ N \cap B=0,\ [N, N] \subseteq B^2 \text{ і } [N, B] \subseteq N,$$

то $[N, B^2]$ - абелева підалгебра із L.

Доведення. Алгебра L з формулювання леми задовольняє всім умовам леми 3 з роботи [3]. Оскільки $N \cap B=0$, то з доведення вищезгаданої леми випливає співвідношення

$$[[N, B^2], [N, B^2]] \subseteq B^3.$$

За умовами даної леми $B^3=0$ і тому $[N, B^2]$ - абелева підалгебра із L. Лема доведена.

Теорема 1. Нехай L - алгебра Лі над полем K характеристики $\neq 2$, яка розкладається в суму $L=A+B$ абелевої підалгебри A і нільпотентної класу 2 підалгебри B. Тоді алгебра L розв'язна ступеня ≤ 10.

Доведення. Позначимо через N K-підпростір $[A, B^2]$. За лемою 1 сума $I_1=N+B^2=[A, B^2]+B^2$ є підалгеброю з L. Позначимо через B_1 підалгебру із B, породжену всіма B-компонентами елементів із N, тобто

$B_1=\langle b \in B \mid \exists n \in N\colon n=a+b$ для деякого $a \in A\rangle$. Оскільки $[N, B_1] \subseteq N$, то, очевидно, L_1 - підалгебра із L. Виходячи із означення підалгебри L_1 неважко переконатись, що $L_1=A_1+B_1$ для деякої підалгебри $A_1 \subseteq A$. Покажемо, що підалгебра L_1 розв'язна ступеня ≤ 6. Нехай спочатку $N_1 \cap B_1=0$. Для довільних елементів $n_1, n_2 \in N$, записаних у вигляді $n_i=a_i+b_i$, де $a_i \in A,\ b_i \in B,\ i=1,2$ з очевидного співвідношення

$$[n_1, n_2]= [n_1, b_2]- [n_2, b_1]- [b_1, b_2]$$

випливає, що $[b_1, b_2]+[n_1, n_2]= [n_1, b_2]- [n_2, b_1]$. Тоді із включень $[N, N] \subseteq B^2$ і $[N, B] \subseteq N$ випливає, що $[b_1, b_2]+[n_1, n_2] \in N \cap B_1=0$ і тому

$$[n_1, n_2]=-[b_1, b_2] \in B_1^2.$$

Це означає, з огляду на довільність елементів n_1 і n_2 , що $[N, N] \subseteq B_1^2$. За лемою 2 $[N, B_1^2]^2=0$ і тому, як неважко переконатись, $J_1=[N, B_1^2]+B_1^2$ - розв'язна алгебра Лі ступеня ≤ 2. Безпосередня перевірка показує, що остання підалгебра є ідеалом підалгебри $L_1=N+B_1=A_1+B_1$. Але фактор-алгебра L_1/J_1 розкладається, очевидно, в суму двох своїх абелевих підалгебр

$$A_1+J_1/J_1 \text{ і } B_1+J_1/J_1$$

(бо $B_1^2 \subseteq J_1$) і тому в силу результатів роботи [2] фактор-алгебра L_1/J_1 розв'язна ступеня ≤ 2. Звідси випливає, що і підалгебра L_1 розв'язна ступеня ≤ 4.

Нехай тепер $N \cap B \neq 0$. Оскільки $[N, N] \subseteq B^2$ і $[N, B] \subseteq N$, то перетин $I=N \cap B$, як неважко переконатись, є ідеалом підалгебри $N+B$. Але тоді $I_1=L_1 \cap I=N \cap B_1$ - ідеал підалгебри L_1. Для фактор-алгебри $L_1=L_1/I_1$ виконується умова $N_1 \cap B_1=0$, де

$$N_1=N_1+I_1/I_1,\ B_1=B_1+I_1/I_1.$$

За доведеним вище фактор-алгебра L_1/I_1 розв'язна ступеня ≤ 4. Але I_1 - розв'язний ідеал ступеня ≤ 2 і тому L_1 - розв'язна підалгебра із L ступеня ≤ 6. Звідси випливає, що підалгебра $N+B_1+B^2$ розв'язна ступеня ≤ 7. За лемою 1 ступінь розв'язності комутанта $L'=[A, B]+B^2$ не перевищує 9 і тому L - розв'язна алгебра Лі ступеня ≤ 10. Теорема доведена.

Зауваження. Із результатів роботи [3] випливає, що ступінь розв'язності $s(L)$ алгебри Лі L, яка розкладається в суму абелевої підалгебри A та нільпотентної класу n підалгебри B обмежена деякою функцією $f(n)$. На жаль, доведення теореми не дає явного вигляду для функції $f(n)$. Відзначимо, що з [2] випливає, що $f(1)=2$, а доведена вище теорема дає (дуже грубу) оцінку $f(2)\leq 10$.

Теорема 2. Над довільним полем K характеристики $p=2$ існує скінченновимірна алгебра Лі L довільного наперед заданого ступеня розв'язності $n\geq 2$, яка розкладається в суму $L=A+B$ абелевої підалгебри A та нільпотентної класу 2 підалгебри B.

Доведення. Нехай L_1 - нерозв'язна алгебра Лі над полем K вигляду $L_1=A_1+B_1$, де A_1 - абелева підалгебра із L_1 і B_1 - нільпотентна класу 2 підалгебра із L_1 (така алгебра існує в силу теореми 1 з роботи [4]). Для алгебри L_1 в силу [4] комутант L_1' є простим неабелевим ідеалом алгебри L_1. Візьмемо асоціативно-комутативну алгебру R над полем K, породжену одним елементом g з співвідношенням $g^{k+1}=0$ і базисом

$$\{g, g^2, \ldots, g^k\}.$$

Тоді, очевидно, R - нільпотентна алгебра індексу нільпотентності $k+1$. Розглянемо тензорний добуток $L=L_1\otimes_K R$ векторних просторів L_1 і R над полем K. В векторному просторі L визначимо множення за правилом

$$[l_1\otimes r_1, l_2\otimes r_2]=[l_1, l_2]\otimes r_1r_2.$$

Неважко переконатись, що з так визначеною операцією L буде алгеброю Лі над полем K (див., наприклад, [5], с.40). Оскільки $R^{k+1}=0$, то $L^{k+1}=0$, тобто алгебра L нільпотентна класу нільпотентності k. Взявши $k=2^n$, ми отримаємо, як неважко переконатись, алгебру Лі ступеня розвязності n. Теорема доведена.

Наслідок. Над довільним полем характеристики $p=2$ існує локально нільпотентна нерозв'язна алгебра Лі L, яка розкладається в суму $L=A+B$ абелевої підалгебри A і нільпотентної класу 2 підалгебри B. Для цього достатньо взяти пряму суму алгебр Лі L_n , побудованих при доведенні теореми 2.

1. Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп) , 11 изд. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990. - 126с. **2**. **Kolman B**., Semi-modular Lie algebras // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A1. - 1965. - 29. - P.149-163. **3**. **Петравчук А.П.,** О разрешимости алгебры Ли, разложимой в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр, Укр. мат. журн. - 1991. - 43, №7-8. - С. 988-993. **4. Петравчук А.П.,** Алгебры Ли, разложимые в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр, Укр. мат. журн. - 1988. - 40, №3. - С. 385-388.. **5. Джекобсон Н.** Алгебры Ли. - М.:Наука, 1964.

A.P.Petravchuk, ON DERIVED LENGTH OF THE SUM OF TWO NILPOTENT LIE ALGEBRAS.

It is proved that the derived length of a Lie algebra L over an arbitrary field of characteristic ≠2 which is decomposable in a sum of an abelian subalgebra and a nilpotent subalgebra of class 2 does not exceed 10. Soluble Lie algebras of an arbitrary derived length ≥2 which can be decomposed as a sum L=A+B with an abelian subalgebra A and a nilpotent subalgebra B of class 2 over a field of characteristic p=2 are built.

Надійшла до редколегії 19.09.2000 р.