MATRIX-ALGEBREN
ÜBER EINER NICHTAUSGEARTETEN
CAYLEY-ALGEBRA

DISSERTATION
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Horst Rühaak
aus Hamburg

Genehmigt von der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Hamburg

auf Antrag von Frau Professor Dr. Braun

Hamburg, den 30. Oktober 1968

Professor Dr. Saalfeld

Dekan

Inhalt

Vorwort

Hauptgegenstand dieser Arbeit sind die Matrix-Algebren $\mathfrak{h}_n^+(\mathcal{C}_8)$ der nxn-Hermiteschen Matrizen, deren Elemente aus einer nichtausgearteten Cayley-Algebra stammen.
Bekanntlich bildet die $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ eine Jordan-Algebra, während bereits $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ nicht potenzassoziativ ist.
Der Inhalt dieser Arbeit sei kurz skizziert.
Einen wichtigen Platz nimmt der Begriff der spurenverträglichen Algebren ein, der sich in [7] findet.
In §1 tragen wir einige Ergebnisse aus dieser Arbeit zusammen, damit wir in den folgenden Paragraphen darauf zurückgreifen können.
Eine spurenverträgliche Algebra besitzt eine symmetrische und assoziative Linearform λ.
Wir beschränken uns auf nichtausgeartete Linearformen λ.
In §2 zeigen wir, dass unter dieser Voraussetzung die spurenverträglichen Algebren vom Grad 2 quadratische Algebren im Sinne von [6] sind. Da die Linearform λ symmetrisch und assoziativ ist, besitzen diese Algebren eine Involution $x \longrightarrow \bar{x}=2\lambda(x)-x$.
Wir zeigen, dass eine nichtausgeartete spurenverträgliche Algebra vom Grad 2 über K, Char$K\neq2$, die die Bedingung

$2\lambda(x(y(\bar{y}\bar{x}))) = 2\lambda(x(y\bar{y})\bar{x})$ für alle $x,y\in\mathfrak{A}$

erfüllt, eine alternative Algebra ist.
In §3 wird kurz die Konstruktion der alternativen Algebren mit Hilfe des bekannten iterativen Verdoppelungsprozesses gegeben, der nach drei Schritten bei den verallgemeinerten nichtkommutativen und nichtassoziativen Cayley-Algebren endet. (vgl.etwa [6,VII,3]
In §4 wird gezeigt, dass für die spurenverträglichen Algebren $\mathfrak{A}$ über K, Char$K\neq2,3$, vom Grad 3, die die zusätzliche Bedingung

$-g_2(x) = \lambda(x^2)$ für alle $x\in\mathfrak{A}$ mit $\lambda(x)=0$ (Bedingung (d) in §4)

befriedigen, die Algebren $\mathfrak{A}(\circ)$ mit dem kommutativen Produkt

$a\circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$, $a,b\in\mathfrak{A}$

die Voraussetzungen der von T.A.Springer in [13] untersuchten Algebren erfüllen. Daher ist $\mathfrak{A}(\circ)$ eine Jordan-Algebra.
T.A.Springer hat in [13] einen Satz bewiesen, der sich mit den

hier verwendeten Begriffen so formulieren lässt:
Satz: Die einfachen kommutativen spurenverträglichen Algebren $\mathfrak{A}(\circ)$ vom Grad 3 mit nichtausgearteter Linearform λ, die die Bedingung (d) erfüllen und Idempotente $e\neq0$ besitzen, sind isomorph zu einer Jordan-Algebra von 3x3-Hermiteschen Matrizen über einer Alternativalgebra.
In §5 wird nun, ausgehend von den vollen Matrix-Algebren auf die Hermiteschen Matrizen n-ten Grades hingearbeitet.
Es wird eine Gruppe G von Automorphismen der vollen Matrix-Algebren $\mathcal{C}_{8,n}(\circ)$ der nxn-Matrizen, deren Elemente in $\mathcal{C}_8$ liegen, definiert, die aus vier beziehungsweise zwei Elementen besteht, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Diese Gruppe G besitzt eine Untergruppe U, die im Falle n ungerade mit G übereinstimmt.
Es werden sodann die Algebren betrachtet, die aus den unter G beziehungsweise U festbleibenden Elementen bestehen.
Es zeigt sich:
Im Falle n=3, G=U, stellt die Algebra der unter G festbleibenden Elemente von $\mathcal{C}_{8,3}(\circ)$ die Jordan-Algebra $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ dar, also die Algebra der 3x3-Hermiteschen Matrizen über der Alternativalgebra $\mathcal{C}_8$.
Im Falle n=4 stellt die Algebra der unter U festbleibenden Elemente von $\mathcal{C}_{8,4}(\circ)$ die Algebra $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ dar, die Algebra der unter G festbleibenden Elemente bildet eine Teiljordan-Algebra $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{C}_8)$ von $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$.
Im Fall n>4 sind die Algebren der unter G beziehungsweise U festbleibenden Elemente von $\mathcal{C}_{8,n}(\circ)$ nicht potenzassoziativ.
Aus diesem Grunde interessieren wir uns besonders für die Fälle n=3 und n=4.
§6 geht kurz auf den Fall n=2 ein, da wir ein paar Eigenschaften der Algebren $\mathcal{C}_{8,2}(\circ)$ und $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{C}_8)$ für die Fälle n=3 und n=4 benötigen. Da $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{C}_8)$ eine Jordan-Algebra vom in [6] behandelten Typ $[X;\mu,e]$ ist, lassen sich die Idempotente, vollständigen Orthogonalsysteme Idempotenter, Invertierbarkeits- und Vertauschbarkeitsbedingungen, die dort hergeleitet sind, für diesen speziellen Fall leicht angeben.
§7 bringt einige kleine Ergänzungen zu dem weitgehend bekannten Fall n=3.
§8 beschäftigt sich mit dem Fall n=4.
Es werden hier die Idempotente und vollständigen Orthogonalsyteme

Idempotenter von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathfrak{L}_8)$ bestimmt, und es wird untersucht, unter welchen Umständen die Peirce-Zerlegung in bezug auf ein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter aus $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathfrak{L}_8)$, die in $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathfrak{L}_8)$ wegen der Gültigkeit des Jordan-Gesetzes möglich ist, auch in $\mathfrak{h}_4^{+}(\mathfrak{L}_8)$ durchgeführt werden kann.

Mein besonderer Dank gilt Frau Professor Braun und Herrn Professor Jordan, die mich bei dieser Arbeit in vielen Gesprächen mit manchem Ratschlag unterstützt haben.

Hamburg, im Juni 1968 Horst Rühaak

§1 Spurenverträgliche Algebren

Wir betrachten im Folgenden endlich-dimensionale Algebren über einem kommutativen Körper, die im allgemeinen weder kommutativ noch assoziativ sind.
Es sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra über dem Körper K mit Einselement 1. Dann lässt sich bekanntlich der Grundkörper K in $\mathfrak{A}$ einbetten.
Wir wählen eine Basis $b_1=1, b_2, \ldots, b_n$ von $\mathfrak{A}$. Die Algebra $\mathfrak{A}$ lässt sich additiv direkt zerlegen in $\mathfrak{A} = K \oplus \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} = Kb_2 + \ldots + Kb_n$, $\mathfrak{L}$ ist Teilraum von $\mathfrak{A}$.
Für $x,y \in \mathfrak{L}$, also $xy \in \mathfrak{A}$ gilt

(1.1) $\quad xy = g(x,y) + x.y$

mit $g(x,y) \in K$, $x,y \in \mathfrak{L}$. Wir haben damit auf dem Vektorraum $\mathfrak{L}$ eine neue Verknüpfung (.) eingeführt.
Wir tragen im Folgenden einige Ergebnisse aus [7] zusammen:

<u>Lemma 1.1: $\mathfrak{L}$ ist bezüglich (.) eine Algebra über K, g ist eine Bilinearform auf $\mathfrak{L}$ mit Werten in K.</u>

g ist im allgemeinen weder symmetrisch noch assoziativ.
Setzt man die so erhaltene Bilinearform g durch
$g(\xi+x, \eta+y) = \xi\eta + g(x,y)$; $\quad \xi,\eta \in K$, $x,y \in \mathfrak{L}$
auf ganz $\mathfrak{A}$ fort, so wird $g(1,1) = 1$ und $\mathfrak{L}$ lässt sich charakterisieren als die Gesamtheit der zum Einselement 1 bezüglich der Bilinearform g orthogonalen Elemente von $\mathfrak{A}$.
Eine einfache Rechnung zeigt

(1.2) $\quad ((\xi+x)(\eta+y))(\zeta+z) - (\xi+x)((\eta+y)(\zeta+z)) = (xy)z - x(yz)$

für alle $x,y,z \in \mathfrak{L}$ und $\xi,\eta,\zeta \in K$.
Setzen wir $(xy)z - x(yz) = (x,y,z)$, so ist es naheliegend, für den Assoziator (x,y,z) zwei Fälle zu unterscheiden:

(1.3) $\quad (x,y,z) \in K$ für alle $x,y,z \in \mathfrak{A}$

(1.4) $\quad (x,y,z) \in \mathfrak{L}$ für alle $x,y,z \in \mathfrak{A}$.

Mit H.J.Höhnke [7] sollen die Algebren $\mathfrak{A}$ mit Einselement und endlicher Dimension über dem kommutativen Körper K, die (1.4) erfüllen, schwach-assoziative Algebren genannt werden. Dieser Name ist insofern berechtigt, als Algebren, die (1.3) und (1.4) gleichzeitig erfüllen, offenbar assoziativ sind. (vgl. auch [15]).

(1.4) ist gleichwertig mit (vgl. [7])

$$(1.5) \qquad g(xy,z) = g(x,yz) \quad \text{für alle } x,y,z \in \mathfrak{A}.$$

Daher:

Eine schwach-assoziative Algebra $\mathfrak{A}$ besitzt eine assoziative Bilinearform g mit $g(1,1) \neq 0$.
Umgekehrt gilt, dass eine Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement, die eine assoziative Bilinearform (x,y) mit $(1,1)=\alpha\neq 0$ besitzt, schwach-assoziativ ist.
Die Algebren $\mathfrak{A}$, für die alle Assoziatoren (x,y,z) und alle Kommutatoren $[x,y] = xy-yx$; $x,y,z \in \mathfrak{A}$, in demselben zum Einselement 1 fremden Teilraum liegen, bilden eine spezielle Klasse der schwach-assoziativen Algebren und werden als schwach-kommutativ-assoziative Algebren bezeichnet. Es gilt (vgl. [7])

Lemma 1.2: Eine Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement ist genau dann schwach-kommutativ-assoziativ, wenn auf $\mathfrak{A}$ eine symmetrische, assoziative Bilinearform (x,y) mit $(1,1)\neq 0$ existiert.

Man setzt nun $\operatorname{Char}K \neq 2$ voraus und führt im Vektorraum $\mathfrak{A}$ beziehungsweise $\mathcal{L}(.)$ als neue Verknüpfung das Produkt $x\circ y = \frac{1}{2}(xy+yx)$, $x,y \in \mathfrak{A}$, beziehungsweise $x\odot y = \frac{1}{2}(x.y+y.x)$, $x,y \in \mathcal{L}$ ein.
Man erhält die kommutativen Algebren $\mathfrak{A}(\circ)$ und $\mathcal{L}(\odot)$.
Es gilt (vgl. [7])

Satz 1.1: Mit $\mathfrak{A}$ ist auch $\mathfrak{A}(\circ)$ eine schwach-kommutativ-assoziative Algebra.

In der kommutativen Algebra $\mathfrak{A}(\circ)$ definieren wir Potenzen x^r des Elementes x rekursiv durch

$$(1.6) \qquad x^0=1, \quad x^r=x^{r-1}\circ x=x\circ x^{r-1}$$

Das mit den n Unbestimmten $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ gebildete generische Element $x=\xi_1+\xi_2 b_2+\ldots+\xi_n b_n$; $1,b_2,\ldots,b_n$ Basis von $\mathfrak{A}$, genügt einer Gleichung

$$(1.7) \qquad g_0(x)x^r-g_1(x)x^{r-1}+\ldots+(-1)^r g_r(x) = 0, \qquad g_0(x) \neq 0,$$

worin $g_i(x)$ eine Form aus $K[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ vom Grad $m+i$, $i\geq 0$ ist.

Genügt das generische Element x von $\mathfrak{A}$ (1.7), aber keiner Gleichung niedrigeren Grades, so heisse (vgl. [7]) r der Grad von $\mathfrak{A}$.

Im Falle einer Charakteristik von K, die kein Teiler von r ist, macht H.J.Höhnke die folgenden Einschränkungen:

(a) $m = 0$.
Dann ist $g_0(x) \in K$, und wir können wegen $g_0(x)\neq 0$ $g_0(x)=1$ annehmen.
$g_1(x):=2\lambda(x)$ ist eine Linearform auf $\mathfrak{A}$, die Spur von x.

(b) $\frac{2\alpha}{r}\lambda(xy) = (x,y)$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\in K$ ist eine symmetrische uns assoziative Bilinearform auf $\mathfrak{A}$, λ also eine symmetrische und assoziative Linearform auf $\mathfrak{A}$.

Mit (1.7) ergibt sich

$$(1.8) \qquad g_j(1) = \binom{r}{j},$$

speziell $g_1(1) = \binom{r}{1}$, somit wegen (b) $(1,1)=\frac{2\alpha}{r}\lambda(1)=\frac{\alpha}{r}g_1(1)=\alpha\neq 0$,
also

$$(1.9) \qquad 2\lambda(1) = r.$$

Eine Algebra $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften (a),(b) ist daher nach Lemma 1.2 eine schwach-kommutativ-assoziative Algebra; wir nennen eine solche Algebra mit H.J.Höhnke [7] spurenverträglich.

§2 Spurenverträgliche Algebren vom Grad 2

In diesem und den nachfolgenden Paragraphen werden wir spezielle Klassen spurenverträglicher Algebren betrachten.
$\mathfrak{A}$ sei eine spurenverträgliche Algebra vom Grad 2 über dem kommutativen Körper K mit Char$K \neq 2$ und Einselement 1. Das generische Element x genügt also einer Gleichung 2.Grades

(2.1) $\quad g_0(x)x^2-g_1(x)x+g_2(x) = 0$

und keiner Gleichung niedrigeren Grades. Da $\mathfrak{A}$ spurenverträglich ist, gilt

(a) $\quad g_0(x)=1$, $g_1(x)=2\lambda(x)$ ist eine Linearform auf $\mathfrak{A}$ mit Werten in K, die Spur von x.

(b) $\quad 2\lambda(xy)$ ist eine symmetrische und assoziative Linearform auf $\mathfrak{A}$ mit Werten in K.

Es gilt wegen (1.9) $\lambda(1) = 1$.
Da $\mathfrak{A}$ schwach-kommutativ-assoziativ ist, können wir $\mathfrak{A}$ direkt zerlegen in $\mathfrak{A}=K\oplus K^{\perp}$ mit $K^{\perp}=\{x\in\mathfrak{A};\lambda(x)=0\}$, und ein Element $x\in\mathfrak{A}$ lässt sich darstellen in der Form $x=\lambda(x)+x'$, $x'\in K^{\perp}$.
Es liegt nahe, die folgende Abbildung einzuführen:
$x\longrightarrow\overline{x}=\lambda(x)-x'$.
Wegen $x'=x-\lambda(x)$ gilt $\overline{x}=2\lambda(x)-x$ und daher

(2.2) $\quad 2\lambda(x) = x+\overline{x}$.

$x\longrightarrow\overline{x}$ ist offenbar ein Vektorraumhomomorphismus und hat die folgenden Eigenschaften:

1. Die Elemente $\neq 0$ werden auf Elemente $\neq 0$ abgebildet.
2. K bleibt fest und aus $x=\overline{x}$ folgt $x\in K$.
3. $x\longrightarrow\overline{x}$ hat die Periode 2.
4. $x\overline{x}=\overline{x}x\in K$.

Neben der symmetrischen und assoziativen Linearform λ betrachten wir die symmetrische Bilinearform $(x,y) = 2\lambda(x\overline{y})$.
Durch

(2.3) $\quad \mu(x):=\frac{1}{2}(x,x)$

definieren wir auf $\mathfrak{A}$ eine quadratische Form μ mit Werten in K.

Es gilt
$\mu(1) = 1$ und $\mu(x+y)-\mu(x)-\mu(y) = (x,y)$.
Mit Eigenschaft 4. der Abbildung $x\longrightarrow\overline{x}$ ergibt sich

(2.4) $\quad \mu(x) = x\overline{x}$. μ heisst die Norm des Elementes $x\in\mathfrak{A}$.

Wegen $2\lambda(x)=x+\overline{x}=g_1(x)$ ergibt sich aus (2.1) $g_2(x)=\mu(x)$, und das generische Element dieser Algebra $\mathfrak{A}$ genügt der Identität

(2.5) $\quad x^2-2\lambda(x)x+\mu(x) = 0$.

Durch Polarisation gewinnen wir aus (2.5) sofort

(2.6) $\quad xy+yx-2\lambda(x)y-2\lambda(y)x+(x,y) = 0$ für alle $x,y\in\mathfrak{A}$.

<u>Def.2.1:</u> Als Involution einer Algebra $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir einen Antiautomorphismus aus $\mathfrak{A}$ der Periode 2.

Nach [6,VII,3] ist wegen (2.5) $\mathfrak{A}$ eine 'quadratische' Algebra. Da λ symmetrisch ist, folgt aus [6,VII,Lemma 3.2], dass $x\longrightarrow\overline{x}$ eine Involution von $\mathfrak{A}$ ist. Wir haben somit

<u>Satz 2.1: Eine spurenverträgliche Algebra vom Grad 2 besitzt eine Involution $x\longrightarrow\overline{x}=2\lambda(x)-x$ mit $\mu(x)=x\overline{x}$ und genügt der Identität $x^2-2\lambda(x)x+\mu(x) = 0$.</u>

Da λ symmetrisch und assoziativ ist, gilt
$2\lambda(x(y(\overline{y}\overline{x}))) = 2\lambda(((xy)\overline{y})\overline{x})$.

Aus der Klasse der spurenverträglichen Algebren $\mathfrak{A}$ vom Grad 2 sondern wir wiederum eine spezielle Klasse aus durch die Forderung

$2\lambda(x(y(\overline{y}\overline{x}))) = 2\lambda(x(y\overline{y})\overline{x})$ für alle $x,y\in\mathfrak{A}$.

Diese Forderung ist gleichwertig mit

(c) $\quad \mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$ für alle $x,y\in\mathfrak{A}$.

Von einer Norm, die die Bedingung (c) erfüllt, sagt man, sie lasse Komposition zu. Es gilt (vgl. [5]): (c) ist gleichwertig mit

(2.7) $\quad (x_1y_2,x_2y_1)+(x_1y_1,x_2y_2)=(x_1,x_2)(y_1,y_2)$ für alle $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathfrak{A}$

<u>Def.2.2:</u> Der Bilinearkern $Bk_{g(x,y)}(\mathfrak{A})$ der Bilinearform $g(x,y)$ sei definiert durch
$Bk_{g(x,y)}(\mathfrak{A}) = \{x\in\mathfrak{A};\ g(x,y)=0$ für alle $y\in\mathfrak{A}\}$.

Die Algebra $\mathfrak{A}$ mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik heisse nichtausgeartet bezüglich der Bilinearform g, wenn die Bilinearform g nichtausgeartet ist auf $\mathfrak{A}$, d.h. wenn aus $g(x,y)=0$ für alle $y \in \mathfrak{A}$ folgt $x=0$, wenn also der Bilinearkern $Bk_{g(x,y)}(\mathfrak{A}) = 0$ ist.

Wir beschränken uns auf Algebren, die nichtausgeartet sind bezüglich der zu der symmetrischen und assoziativen Linearform λ gehörigen Bilinearform, wir sprechen auch von bezüglich λ nichtausgearteten Algebren.

Da auch (x,y) nichtausgeartet ist, lassen sich leicht die Formeln

(2.8) $\quad a(\bar{a}b) = \mu(a)b, \qquad (b\bar{a})a = \mu(a)b$

herleiten. Mit Hilfe von (2.8) lässt sich nun zeigen, dass $\mathfrak{A}$ eine alternative Algebra ist.

<u>Def.2.3:</u> Eine Algebra $\mathfrak{A}$ über K heisst alternativ, wenn für je drei Elemente $x_1,x_2,x_3 \in \mathfrak{A}$ der Assoziator (x_1,x_2,x_3) in dem Sinne alterniert, dass $(x_1,x_2,x_3)=\varepsilon(x_{i1},x_{i2},x_{i3})$ für jede Permutation i_1,i_2,i_3 von 1,2,3 gilt. Dabei ist $\varepsilon=1$ für gerade, $\varepsilon=-1$ für ungerade Permutationen.

Diese Definition ist gleichwertig mit (vgl. [6,VII,1]) der

<u>Def.2.4:</u> Eine Algebra $\mathfrak{A}$ über K heisst alternativ, wenn für alle $x_1,x_2 \in \mathfrak{A}$ die Bedingungen $x_1(x_1x_2)=x_1^2x_2$, $(x_1x_2)x_2=x_1x_2^2$ erfüllt sind.

Den Nachweis der Alternativität unseres $\mathfrak{A}$ erhält man über die Moufang-Identitäten

(2.9) $\quad (ax)(ya) = (a(xy))a = a((xy)a)$

durch Polarisieren. Die Moufang-Identitäten lassen sich aber mit Hilfe der Formeln (2.7) und (2.8) leicht zeigen.
Wir haben somit

<u>Satz 2.2: Eine spurenverträgliche Algebra vom Grad 2, die die Bedingung
(c) $\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$ erfüllt und nichtausgeartet ist bezüglich λ, ist eine alternative Algebra.</u>

Wegen der Kompositionseigenschaft der Norm μ heissen die so konstruierten Algebren auch Kompositionsalgebren (vgl. [3]).

<u>§3 Konstruktion der Cayley-Algebren</u>

Wir betrachten eine Kompositionsalgebra $\mathfrak{A}$ mit der symmetrischen Bilinearform (x,y) und der Involution $x \longrightarrow \bar{x}=(1,x)-x=2\lambda(x)-x$.
Bezeichnungen (nach [4]):
Die Elemente $x_1,x_2 \in \mathfrak{A}$ mögen orthogonal zueinander heissen, wenn $(x_1,x_2)=0$ gilt.
Zwei Teilräume $\mathfrak{B},\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{A}$ mögen orthogonal zueinander heissen, wenn jedes Element aus $\mathfrak{B}$ orthogonal zu jedem Element aus $\mathfrak{B}'$ ist.
Ein Element $x\neq 0, x \in \mathfrak{A}$ heisse bezüglich (x,y) isotrop, wenn $(x,x)=0$, also $\mu(x)=0$ ist.
Ein Teilraum $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ heisse bezüglich (x,y) isotrop, wenn es ein Element $x\neq 0$ in $\mathfrak{B}$ gibt mit $(x,y)=0$ für alle $y\in\mathfrak{A}$, wenn also die Restriktion von (x,y) auf $\mathfrak{B}$ ausgeartet ist.
Eine Algebra möge natürlich isotrop heissen, wenn sie als Vektorraum isotrop ist.

$\mathfrak{B}$ sei nun eine echte Teilalgebra von $\mathfrak{A}$, die bezüglich (x,y) nichtausgeartet ist, für die also $Bk_{(x,y)}(\mathfrak{B})=0$ gilt und deren Einselement das Einselement 1 von $\mathfrak{A}$ ist.
Offenbar gilt $Bk_{(x,y)}(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}^{\perp}$, also $Bk_{(x,y)}(\mathfrak{B})=\mathfrak{B}\cap\mathfrak{B}^{\perp}=Bk_{(x,y)}(\mathfrak{B}^{\perp})=0$.
Daher ist $\mathfrak{A}$ die direkte Summe von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^{\perp}$, also $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}+\mathfrak{B}^{\perp}$ und $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{B}^{\perp}=0$. Da $\mathfrak{B}^{\perp}$ nicht isotrop ist, enthält es ein x_o mit $\mu(x_o)=-x_o^2=-\xi\neq 0$. Es gilt $x_o\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}^{\perp}$ und $\mathfrak{B}, x_o\mathfrak{B}$ haben dieselbe Dimension. Man betrachtet die direkte Summe $\mathfrak{B}\oplus x_o\mathfrak{B}$. (x,y) ist nichtausgeartet auf $\mathfrak{B}\oplus x_o\mathfrak{B}$ und mit Hilfe der Formeln (2.7),(2.8) lässt sich zeigen

<u>Satz 3.1: $\mathfrak{B}\oplus x_o\mathfrak{B}$ ist eine Teilalgebra von $\mathfrak{A}$ mit der Multiplikationsformel</u>

<u>(3.1) $\quad (a_1+x_oa_2)(b_1+x_ob_2) = (a_1b_1+\xi b_2\bar{a}_2)+x_o(\bar{a}_1b_2+b_1a_2)$</u>

<u>und ist als Teilalgebra von $\mathfrak{A}$ eine Kompositionsalgebra.</u>
(vgl.etwa [6,VII,3]).
Für Involution und Norm gelten die Regeln

(3.2) $\quad \overline{a_1+x_oa_2} = \bar{a}_1-\bar{a}_2x_o = \bar{a}_1-x_oa_2$

daher

(3.3) $\quad \mu(a_1+x_oa_2) = \mu(a_1)-\xi\mu(a_2)$.

Da die Bilinearform auf $\mathfrak{B}$ nichtausgeartet ist, erhält man

Satz 3.2: $\mathfrak{B}$ ist eine assoziative Teilalgebra von $\mathfrak{A}$.

und

Satz 3.3: Ist $\mathfrak{B}$ assoziativ, so ist $\mathfrak{B}\oplus x_c\mathfrak{B}$ alternativ.

Ist die Kompositionsalgebra $\mathfrak{A}$ bereits selbst assoziativ, so ist $\mathfrak{B}$ offenbar darüberhinaus kommutativ und umgekehrt:
Ist $\mathfrak{B}$ kommutativ und assoziativ, so ist $\mathfrak{B}\oplus x_c\mathfrak{B}$ assoziativ.
(vgl.[6,VII,Satz 4.1]).

Wir können nun in bekannter Weise mit Hilfe eines iterativen Prozesses Alternativalgebren konstruieren:
Wir beginnen mit der eindimensionalen, kommutativen und assoziativen Algebra $\mathfrak{B}_1=K$. Die Bilinearform $(x,y)=xy(1,1)=2xy$ ist wegen Char$K\neq 2$ auf $\mathfrak{B}_1$ nichtausgeartet, und die Involution $x\longrightarrow\bar{x}$ ist auf $\mathfrak{B}_1$ die Identität.
Wir können $\mathfrak{A}$ also zerlegen in $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}_1\oplus\mathfrak{B}_1^{\perp}$. Da mit $\mathfrak{B}_1$ auch $\mathfrak{B}_1^{\perp}$ nicht isotrop ist, gibt es ein $x_1\in\mathfrak{B}_1^{\perp}$ mit $\mu(x_1)=-x_1^{\ 2}=-\xi_1\neq 0$.
Mit $\mathfrak{B}_1$ konstruieren wir nach obigem Schema die Teilalgebra $\mathfrak{B}_2=\mathfrak{B}_1\oplus x_c\mathfrak{B}_1$.
Da $\mathfrak{B}_1$ kommutativ und assoziativ ist, ist $\mathfrak{B}_2$ eine assoziative Teilalgebra von $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}_2$ hat die Dimension 2 über K und ist kommutativ.
Die Algebren $\mathfrak{B}_2$ sind die quadratischen Körper über K.
Da (x,y) auf $\mathfrak{B}_2$ nichtausgeartet ist, lässt sich der Prozess fortsetzen: Es gibt ein $x_2\in\mathfrak{B}_2^{\perp}$ mit $\mu(x_2)=-x_2^{\ 2}=-\xi_2\neq 0$.
Die Algebra $\mathfrak{B}_4=\mathfrak{B}_2\oplus x_2\mathfrak{B}_2$ ist assoziativ mit der Dimension 4 über K.
Die Algebren $\mathfrak{B}_4$ sind die verallgemeinerten Quaternionenalgebren.
Sie sind nicht kommutativ.
Wie oben gibt es ein $x_4\in\mathfrak{B}_4^{\perp}$ mit $\mu(x_4)=-x_4^{\ 2}=-\xi_4\neq 0$.
Die Algebra $\mathfrak{B}_8=\mathfrak{B}_4\oplus x_4\mathfrak{B}_4$ ist eine achtdimensionale alternative Algebra über K, sie ist nicht assoziativ.
Die Algebren $\mathfrak{B}_8$ sind die verallgemeinerten Cayley-Algebren.
Da $\mathfrak{B}_8$ nicht assoziativ ist, endet der Prozess, Alternativalgebren zu konstruieren, nach diesen drei Schritten.
Da wir uns auf nichtausgeartete Bilinearformen beschränkt haben, gilt schliesslich
Die Kompositionsalgebren $\mathfrak{B}_4,\mathfrak{B}_8$ sind zentral-einfach.
(vgl. [6,Satz 3.5, 4.2]).

§4 Spurenverträgliche Algebren vom Grad 3

Die folgenden Definitionen finden sich in [6] .

Def.4.1: Eine Algebra $\mathfrak{A}$ über dem kommutativen Körper K heisse einfach, wenn $\mathfrak{A}$ keine Nullalgebra ist und $\{0\}$ und $\mathfrak{A}$ die einzigen Ideale von $\mathfrak{A}$ sind.

Def:4.2: Nukleus $\mathfrak{g}$ einer Algebra $\mathfrak{A}$ nennen wir die Menge $\{g\in\mathfrak{A};\ (g,\mathfrak{A},\mathfrak{A})=(\mathfrak{A},g,\mathfrak{A})=(\mathfrak{A},\mathfrak{A},g)=0\}$.
Zentrum $\mathfrak{z}$ einer Algebra $\mathfrak{A}$ nennen wir die Menge $\{z\in\mathfrak{g};\ [z,\mathfrak{A}]=0\}$.

$\mathfrak{g}(\mathfrak{A})$ ist eine assoziative Teilalgebra von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})$ eine kommutative und assoziative Teilalgebra von $\mathfrak{A}$.

Def.4.3: Eine Algebra $\mathfrak{A}$ heisse zentral, wenn $\mathfrak{A}$ ein Einselement 1 besitzt und $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})=K$ gilt.

Es gilt die folgende Alternative:
Ist $\mathfrak{A}\neq\{0\}$ eine Algebra, deren einzige Ideale $\{0\}$ und $\mathfrak{A}$ sind, so tritt genau einer der folgenden Fälle ein:
a) $\mathfrak{A}$ ist die eindimensionale Nullalgebra $\mathfrak{A}=Kx$, $x^2=0$.
b) $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})=\{0\}$.
c) $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})$ ist ein Körper, dessen Einselement das Einselement von $\mathfrak{A}$ ist.

Es gilt:
Ist $\mathfrak{A}$ eine einfache Algebra mit Einselement 1, so ist $\mathfrak{z}(\mathfrak{A})$ ein endlicher Erweiterungskörper von K. (Beweise[6,I ,Satz 5.1,Kor.1])
Man kann also eine einfache Algebra auch als zentral-einfache Algebra über ihrem Zentrum auffassen.

Def.4.4: Eine Algebra $\mathfrak{A}$ über dem kommutativen Körper K heisse Jordan-Algebra, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:
(J.1) $\quad [x,y]=0$
(J.2) $\quad x^2(xy)=x(x^2y)$
für alle x,y aus $\mathfrak{A}$.

Def.4.5: Eine Algebra $\mathfrak{A}$ über dem kommutativen Körper K heisse potenzassoziativ, wenn die von einem beliebigen Element $x\in\mathfrak{A}$ erzeugte Teilalgebra von $\mathfrak{A}$ assoziativ ist.

Die Jordan-Algebren gehören zu der Klasse der potenzassoziativen Algebren. (Beweis [6,IV,Satz 1.4,1.5])
$\mathfrak{A}$ sei eine assoziative Algebra über dem kommutativen Körper K mit Char$K\neq 2$. Dann ist $\mathfrak{A}(\circ)$ offenbar eine Jordan-Algebra. Mit $\mathfrak{A}$ ist auch jede ihrer Teilalgebren Jordan-Algebra.
Eine Algebra $\mathfrak{J}$ heisse spezielle Jordan-Algebra, wenn $\mathfrak{J}$ isomorph ist zu einer Teilalgebra von $\mathfrak{A}(\circ)$ einer assoziativen Algebra $\mathfrak{A}$.
Nicht jede Jordan-Algebra ist speziell. Die nicht speziellen Jordan-Algebren werden auch als exceptionell bezeichnet. Uns interessieren die exceptionellen Jordan-Algebren, auf die wir im Folgenden hinarbeiten.

$\mathfrak{A}$ sei eine spurenverträgliche Algebra über dem kommutativen Körper K mit Char$K\neq 2,3$ vom Grad 3.
Das generische Element x von $\mathfrak{A}$ genügt also einer Gleichung dritten Grades:

$$(4.1) \qquad x^3-2\lambda(x)x^2+g_2(x)x-g_3(x) = 0$$

und keiner Gleichung niedrigeren Grades. Die Linearform λ ist symmetrisch und assoziativ, und es gilt nach (1.9)

$$(4.2) \qquad 2\lambda(1) = 3.$$

$\mathfrak{A}$ lässt sich bezüglich λ zerlegen in $\mathfrak{A}=K\oplus\mathcal{L}$ mit $\mathcal{L}=\{x\in\mathfrak{A};\ 2\lambda(x)=0\}$.
Aus der Klasse der spurenverträglichen Algebren vom Grad 3 greifen wir diejenigen heraus, die der zusätzlichen Bedingung

$$(d) \qquad -g_2(x) = \lambda(x^2) := \nu(x) \quad \text{für alle } x\in\mathcal{L}$$

genügen.
Für ein $x\in\mathcal{L}$, für das also $2\lambda(x)=0$ ist, wird (4.1) mit (d) zu

$$x^3-\nu(x)x-g_3(x) = 0 \quad \text{für alle } x\in\mathcal{L}.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung bezüglich $(\circ)$ mit x und berechnen von der entstehenden Gleichung die Spur. Wir erhalten

$$2\lambda(x^4)-2\nu(x)\lambda(x^2) = 0 \quad \text{für alle } x\in\mathcal{L}.$$

Mit (d) folgt $\lambda(x^4) = \nu^2(x)$. Da nach Satz 1.1 λ auch bezüglich $(\circ)$ symmetrisch und assoziativ ist, gilt

$$\lambda(x^4) = \lambda(x^2\circ x^2), \text{ also } \lambda(x^2\circ x^2) = \lambda^2(x^2),$$

und daher

$$4.3) \qquad \nu^2(x) = \nu(x^2) \quad \text{für alle } x\in\mathcal{L}.$$

ie Algebra $\mathfrak{A}(\circ)$ ist dann eine kommutative Algebra mit assoziativer ilinearform.
n [13] hat T.A.Springer gezeigt, dass eine kommutative Algebra it Einselement, die eine assoziative nichtausgeartete Bilinearorm besitzt und (4.2) und (4.3) erfüllt, eine Jordan-Algebra ist. ir haben

atz 4.1: $\mathfrak{A}$ sei eine spurenverträgliche Algebra über dem kommutaiven Körper K mit Char$K\neq 2,3$ vom Grad 3 mit einer nichtausgeareten Linearform λ, die die Bedingung (d) erfüllt. Dann ist die purenverträgliche Algebra $\mathfrak{A}(\circ)$ eine Jordan-Algebra.

.A.Springer hat in [13] die Struktur solcher Algebren untersucht nd einen Satz bewiesen, den wir mit den hier benutzten Begriffen o formulieren können:

atz 4.2: Die einfachen kommutativen spurenverträglichen Algebren $\mathfrak{l}(\circ)$ vom Grad 3 mit nichtausgearteter Linearform λ, die der Beingung (d) genügen und Idempotente $e\neq 0$ besitzen, sind isomorph u einer Jordan-Algebra von 3x3-Hermiteschen Matrizen über einer ompositionsalgebra.

n §7 werden wir diese Algebren näher betrachten und für den Fall, ass die Kompositionsalgebra eine Cayley-Algebra ist, nachweisen, ass sie spurenverträglich vom Grad 3 sind, eine nichtausgeartete inearform besitzen, Idempotente $\neq 0$ aufweisen und die Bedingung d) erfüllen.

§5 Die Matrix-Algebren $\mathcal{L}_{8,n}(\cdot)$

1. $\mathfrak{A}$ sei eine Algebra mit Einselement 1 über dem kommutativen Körper K mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik. $\mathfrak{A}_n$ bezeichne die Algebra der nxn-Matrizen mit Elementen in $\mathfrak{A}$. Das Produkt in $\mathfrak{A}_n$ sei das gewöhnliche Matrizenprodukt.
Wir spezialisieren auf den Fall, dass die Algebra $\mathfrak{A}$ eine Kompositionsalgebra ist. Als spurenverträgliche Algebra vom Grad 2, die der Bedingung (c) genügt, besitzt $\mathfrak{A}$ die Involution $x \longrightarrow \bar{x} = 2\lambda(x) - x$.
Es sei A ein Element von $\mathfrak{A}_n$, A also eine Matrix von n Zeilen und Spalten, $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} \in \mathfrak{A}$, $i,j = 1,2,\dots,n$. Mit $\bar{A}$ wollen wir die Matrix $(\overline{a_{ij}})$ bezeichnen, mit SpurA die Summe der Diagonalelemente von A: $\mathrm{Spur}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Wir beweisen das folgende

Lemma 5.1: $\Lambda: A \longrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}A + \mathrm{Spur}\bar{A})$ ist eine symmetrische und assoziative Linearform auf $\mathfrak{A}_n$ mit Werten in K.

Beweis: Wegen

$\mathrm{Spur}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Spur}A + \mathrm{Spur}B$ und

$\mathrm{Spur}(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \mathrm{Spur}A$, somit auch

$\mathrm{Spur}A + \mathrm{Spur}\bar{A} = \mathrm{Spur}(A+\bar{A})$, ist Λ eine Linearform auf $\mathfrak{A}_n$. Die Werte liegen in K, da

$\Lambda(A) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} 2\lambda(a_{ii})\right)$ gilt.

Λ ist eine symmetrische Linearform.

Denn:
$$\begin{aligned}
\Lambda(AB) &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{Spur}AB + \mathrm{Spur}\overline{AB}) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{Spur}\big(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}\big) + \mathrm{Spur}\big(\overline{\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu j}}\big)\Big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{\nu,i=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu i} + \sum_{\nu,i=1}^{n} \overline{a_{i\nu} b_{\nu i}}\Big) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,\nu=1}^{n} 2\lambda(a_{i\nu} b_{\nu i}) = \\
&= \sum_{i,\nu=1}^{n} \lambda(a_{i\nu} b_{\nu i}) = \sum_{i,\nu=1}^{n} \lambda(b_{i\nu} a_{i\nu}) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{\nu,i=1}^{n} b_{\nu i} a_{i\nu} + \sum_{\nu,i=1}^{n} \overline{b_{\nu i} a_{i\nu}}\Big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{Spur}\big(\sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} a_{i\nu}\big) + \mathrm{Spur}\big(\overline{\sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} a_{i\nu}}\big)\Big) = \\
&= \tfrac{1}{2}(\mathrm{Spur}BA + \mathrm{Spur}\overline{BA}),
\end{aligned}$$

da λ eine symmetrische Linearform auf $\mathfrak{A}$ ist.

Λ ist eine assoziative Linearform.

enn:
$$\begin{aligned}
\Lambda((AB)C) - \Lambda(A(BC)) &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{Spur}(AB)C + \mathrm{Spur}\overline{(AB)C}) - \tfrac{1}{2}(\mathrm{Spur}A(BC) + \mathrm{Spur}\overline{A(BC)}) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{Spur}\big(\sum_{\mu,\nu=1}^{n}(a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu j}\big) + \mathrm{Spur}\big(\overline{\sum_{\mu,\nu=1}^{n}(a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu j}}\big)\Big) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{Spur}\big(\sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu j})\big) + \mathrm{Spur}\big(\overline{\sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu j})}\big)\Big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}(a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu i} + \overline{\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}(a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu i}}\Big) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i,\nu,\mu=1}^{n} a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu i}) + \overline{\sum_{i,\nu,\mu=1}^{n} a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu i})}\Big) = \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i,\mu,\nu=1}^{n}(a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu i} + \overline{(a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu i}}\Big) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i,\nu,\mu=1}^{n} a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu i}) + \overline{a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu i})}\Big) = \\
&= \sum_{i,\nu,\mu=1}^{n} \lambda((a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu i}) - \sum_{i,\nu,\mu=1}^{n} \lambda(a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu i})) = \\
&= \sum_{i,\mu,\nu=1}^{n} \big(\lambda((a_{i\nu} b_{\nu\mu}) c_{\mu i}) - \lambda(a_{i\nu}(b_{\nu\mu} c_{\mu i}))\big) = 0,
\end{aligned}$$

a λ eine assoziative Bilinearform auf $\mathfrak{A}$ ist.

. Auf dem Vektorraum $\mathfrak{A}_n$ führen wir das Produkt $(\cdot)$ ein, gegeben urch $A \cdot B = \frac{1}{2}(AB+BA)$ für $A,B \in \mathfrak{A}_n$, AB das Matrizenprodukt von A nd B. Wir erhalten die kommutative Algebra $\mathfrak{A}_n(\cdot)$.

it E_{ij} bezeichnen wir die Matrix mit dem Einselement 1 von $\mathfrak{A}$ an er Stelle (i,j) und Null an allen anderen Stellen.

ür E_{ij} gilt

5.1) $\quad E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ und $\sum_{i=1}^{n} E_{ii} = E$; $i,j = 1,2,\dots,n$,

enn wir mit E diejenige Matrix bezeichnen, deren Hauptdiagonale ur $1 \in \mathfrak{A}$ aufweist, deren andere Elemente 0 sind, also das Einselent von $\mathfrak{A}_n$, beziehungsweise $\mathfrak{A}_n(\cdot)$.

it Hilfe der Def.4.3 sieht man leicht, dass die Matrizen E_{ij} im ukleus von $\mathfrak{A}_n$ liegen.

ie n^2 Matrizen E_{ij} bezeichnen wir als Matrixeinheiten. (s. [8])

atz 5.1: Die Algebren $\mathfrak{A}_n(\cdot)$ sind einfach.

eweis: Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{A}_n(\cdot)$, $\mathfrak{a} \neq 0$. Es existiert also eie Matrix $A \neq 0$, $A \in \mathfrak{a}$. Mit Hilfe des Systems der n^2 Matrixeinheiten ässt sich jedes Element $A \in \mathfrak{A}_n(\cdot)$ schreiben in der Form

5,2) $\quad A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$.

ür n=1 ist $\mathfrak{A}_n(\cdot)$ eine einfache Algebra (vergleiche Satz 3.4) .

Es sei also $n\geq 2$.
Wir wählen $X=E_{kk}$, $Y=E_{mm}\in \mathfrak{A}_n(\circ)$, $k\neq m$.
Es gilt

$$(A\circ Y) = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}\Big)\circ E_{mm} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{im}E_{im}+\sum_{j=1}^{n} a_{mj}E_{mj}\Big) ,$$

daher

$$X\circ(A\circ Y) = \frac{1}{2}E_{kk}\circ\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{im}E_{im}+\sum_{j=1}^{n} a_{mj}E_{mj}\Big) = \frac{1}{4}(a_{km}E_{km}+a_{mk}E_{mk}).$$

Mit $Z=2(E_{km}+E_{mk})\in\mathfrak{A}_n(\circ)$ folgt

$$B=(X\circ(A\circ Y))\circ Z = \frac{1}{4}(a_{km}E_{km}+a_{mk}E_{mk})\circ 2(E_{km}+E_{mk}) =$$
$$= \frac{1}{4}(a_{mk}E_{mm}+a_{km}E_{kk}+a_{km}E_{mm}+a_{mk}E_{kk}) = \frac{1}{4}((a_{km}+a_{mk})(E_{kk}+E_{mm})),$$

daher

$$C = B\circ(\overline{a_{km}}+\overline{a_{mk}})E_{kk} = \frac{1}{4}((a_{km}+a_{mk})(E_{kk}+E_{mm}))\circ(\overline{a_{km}}+\overline{a_{mk}})E_{kk} =$$
$$= \frac{1}{4}N(a_{km}+a_{mk})E_{kk} .$$

Daher gilt $E_{kk}\in\mathfrak{a}$ für alle $k=1,2,\dots,n$, also $E\in\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}=\mathfrak{A}_n(\circ)$.
Wir beweisen den

<u>Satz 5.2: $\Lambda: A\longrightarrow\frac{1}{2}(\mathrm{Spur}A+\mathrm{Spur}\bar{A})$ ist eine symmetrische und assoziative, auf $\mathfrak{A}_n(\circ)$ nichtausgeartete Linearform mit Werten in K.</u>

Beweis: Wegen Lemma 5.1 ist Λ eine Linearform auf $\mathfrak{A}_n(\circ)$ mit Werten in K.
Λ ist eine symmetrische Linearform auf $\mathfrak{A}_n(\circ)$, da $\mathfrak{A}_n(\circ)$ kommutativ ist.
Λ ist eine assoziative Linearform auf $\mathfrak{A}_n(\circ)$.
Denn:

$$\Lambda((A\circ B)\circ C)-\Lambda(A\circ(B\circ C)) = \frac{1}{4}(\Lambda((AB)C)+\Lambda((BA)C)+\Lambda(C(AB))+\Lambda(C(BA))-$$
$$-\Lambda(A(BC))-\Lambda(A(CB))-\Lambda((BC)A)-\Lambda((CB)A)) = 0,$$

wegen $\Lambda((AB)C) = \Lambda(A(BC))$, $\Lambda(C(BA)) = \Lambda((CB)A)$,
$\Lambda((BA)C) = \Lambda(C(BA)) = \Lambda((CB)A) = \Lambda(A(CB))$,
$\Lambda(C(AB)) = \Lambda((AB)C) = \Lambda(A(BC)) = \Lambda((BC)A)$.

Λ ist nichtausgeartet auf $\mathfrak{A}_n(\circ)$.
Denn:
Wir definieren den Bilinearkern $Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ))$ von Λ durch

$$Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ)) := \{A\in\mathfrak{A}_n(\circ);\ \Lambda(X\circ A)=0 \quad \forall X\in\mathfrak{A}_n(\circ)\} .$$

Ersichtlich stimmt dieser Bilinearkern mit dem der Λ zugeordneten Bilinearform überein (vergleiche Def.2.2), die wegen Λ ebenfalls symmetrisch und assoziativ ist. Ist $A\in Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ))$ und $B\in\mathfrak{A}_n(\circ)$

so gilt
$\Lambda((A\circ B)\circ X) = \Lambda(A\circ(B\circ X)) = 0$ für alle $X\in\mathfrak{A}_n(\circ)$,
also $A\circ B\in Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ))$. Da $Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ))$ ein Unterraum von $\mathfrak{A}_n(\circ)$ ist, ist $Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ))$ ein Ideal von $\mathfrak{A}_n(\circ)$.
Wegen $\Lambda(E_{ii}) = 1$, also $\Lambda\neq 0$ gilt $Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ))\neq\mathfrak{A}_n(\circ)$. Denn aus $E\in Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ))$ folgt $\Lambda(X) = \Lambda(E\circ X) = 0$ für alle $X\in\mathfrak{A}_n(\circ)$ und daher $\Lambda=0$.
Da $\mathfrak{A}_n(\circ)$ einfach ist, folgt $Bk_\Lambda(\mathfrak{A}_n(\circ)) = 0$.

5. Wir beschränken uns im Folgenden auf die nichtassoziative, nichtkommutative Kompositionsalgebra $\mathcal{C}_8$.

<u>Def.5.1:</u> Ein involutorischer Automorphismus ϕ von $\mathcal{C}_{8,n}(\circ)$ möge ein involutorischer Permutationsautomorphismus heissen, wenn ϕ, bis auf Übergang $a_{ij}\longrightarrow\overline{a_{ij}}$, nur die Elemente der Matrizen $A=(a_{ij})$ aus $\mathcal{C}_{8,n}(\circ)$ permutiert.

Wir stellen ein Element $A\in\mathcal{C}_{8,n}(\circ)$ in der Form (5.2) $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ dar. ϕ sei ein involutorischer Permutationsautomorphismus. Dann lässt sich schreiben

$$(5.3)\qquad \phi(A) = \sum_{i,j=1}^{n}\varphi(a_{ij})\phi(E_{ij})$$

mit $\varphi=\mathrm{Id}$ oder $\varphi: a_{ij}\longrightarrow\overline{a_{ij}}$, die in $\mathcal{C}_8$ gegebene Involution.
Bei den Rechnungen mit einem solchen ϕ können wir also seine Wirkung auf die einzelnen Matrixeinheiten E_{ij} betrachten.
Es gilt also

$$(5.4)\qquad \phi(a_{ij}E_{ij}) = \varphi(a_{ij})E_{i+\mu,j+\nu}$$

Da ϕ involutorisch ist, gilt

$$(5.5)\qquad \phi^2(a_{ij}E_{ij}) = a_{ij}E_{ij} = \varphi^2(a_{ij})E_{i+\mu+\sigma,j+\nu+\varrho} = a_{ij}E_{i+\mu+\sigma,j+\nu+\varrho}$$

Wir zeigen: $\phi(E) = E$.
Denn:
$\phi(A\circ E) = \phi(A)\circ\phi(E)$, also $\phi(A)\circ(E-\phi(E)) = 0$ für alle $A\in\mathfrak{A}_n(\circ)$. Da ϕ eineindeutig auf ist, durchläuft mit A auch $\phi(A)$ ganz $\mathcal{C}_{8,n}$. Es folgt $\Lambda((E-\phi(E))\circ A) = 0$ für alle $A\in\mathcal{C}_{8,n}(\circ)$. Da Λ auf $\mathcal{C}_{8,n}(\circ)$ nichtausgeartet ist, haben wir $E-\phi(E) = 0$.
Ebenso zeigt man $\phi(0) = 0$.
Für die Matrixeinheiten gilt wegen (5.1)

$$(5.6)\qquad E_{ij}\circ E_{km} = \frac{1}{2}(\delta_{jk}E_{im}+\delta_{mi}E_{kj}) ,$$

also

(5.7) $E_{ij}^{\,2} = \delta_{ji}E_{ij}$.

Mit unseren Voraussetzungen über ϕ gilt daher

$\phi(E_{ii}^{\,2}) = \phi(E_{ii})\cdot\phi(E_{ii}) = \phi(E_{ii})$, also

$E_{i+\nu,i+\mu}\cdot E_{i+\nu,i+\mu} = E_{i+\nu,i+\mu}$.

Angenommen es gilt $\nu\neq\mu$. Aus (5.7) folgt sofort $\phi(E_{ii}) = 0$. Das ist ein Widerspruch gegen die Eineindeutigkeit von ϕ. Also gilt $\nu=\mu$, daher $\phi(E_{ii}) = E_{i+\nu,i+\nu}$, d.h.

ϕ bildet die Diagonale eines Elementes $A\in\mathcal{L}_{8,n}(\cdot)$ auf sich ab.

Weiter folgt wegen $\phi^2=Id$

$\phi^2(E_{ii}) = E_{ii} = \phi(E_{i+\nu,i+\nu}) = E_{i+\nu+\varrho,i+\nu+\varrho}$, daher $\nu+\varrho=0(\mathrm{mod}\ n)$.

Es gilt wegen (5.6)

$E_{ii}\cdot E_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ii}E_{ij}+E_{ij}E_{ii}) = \frac{1}{2}E_{ij}$ und

$E_{jj}\cdot E_{ij} = \frac{1}{2}(E_{jj}E_{ij}+E_{ij}E_{jj}) = \frac{1}{2}E_{ij}$ für $i\neq j$.

Für $i\neq j$ gilt daher

$$\phi(E_{ii}\cdot E_{ij}) = \phi(E_{ii})\cdot\phi(E_{ij}) = E_{i+\mu,i+\mu}\cdot E_{i+\varrho,j+\sigma} = \frac{1}{2}(\delta_{i+\mu,i+\varrho}E_{i+\mu,j+\varrho}+\delta_{j+\sigma,i+\mu}E_{i+\varrho,i+\mu}) ,$$

andererseits aber

$\frac{1}{2}\phi(E_{ij}) = \frac{1}{2}E_{i+\varrho,j+\sigma}$, also gilt

entweder 1. $\mu=\varrho$ und $j+\sigma\neq i+\mu$

oder 2. $j+\sigma=i+\mu$ und $\mu\neq\varrho$

Ebenso

$$\phi(E_{jj}\cdot E_{ij}) = \phi(E_{jj})\cdot\phi(E_{ij}) = E_{j+\lambda,j+\lambda}\cdot E_{i+\varrho,j+\sigma} = \frac{1}{2}(\delta_{j+\lambda,i+\varrho}E_{j+\lambda,j+\sigma}+\delta_{j+\sigma,j+\lambda}E_{i+\varrho,j+\lambda}) ,$$

andererseits aber

$\frac{1}{2}\phi(E_{ij}) = \frac{1}{2}E_{i+\varrho,j+\sigma}$, also gilt

entweder 1. $\sigma=\lambda$ und $j+\lambda\neq i+\varrho$

oder 2. $j+\lambda=i+\varrho$ und $\sigma\neq\lambda$

(i) Angenommen es gilt beide Male 1.

Wir haben als Folgerung: $E_{ii}\longrightarrow E_{i+\mu,i+\mu}$, $E_{ij}\longrightarrow E_{i+\mu,j+\sigma}$,
$E_{jj}\longrightarrow E_{j+\sigma,j+\sigma}$.

Wir haben:

Zeilen (Spalten) gehen auf Zeilen (Spalten) über.

Wegen $E_{ii}\longrightarrow E_{i+\mu,i+\mu}$ setze $\mu=\sigma$. Dann ist aber μ fest für alle $i,j=1,2,\ldots,n$. Die Abbildungsvorschrift lautet also allgemein:

$E_{ij}\longrightarrow E_{i+\mu,j+\mu}$ mit festem μ für alle $i,j=1,2,\ldots,n$.

Da ϕ eine Involution ist, folgt weiter $\phi^2(E_{ij}) = E_{ij} = E_{i+2\mu,j+2\mu}$, daher $2\mu=0(\mathrm{mod}\ n)$.

Allgemein haben wir also

$\phi(a_{ij}E_{ij}) = \varphi(a_{ij})E_{i+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2}}$

a) $$\phi(a_{ij}E_{ij}\cdot b_{km}E_{km}) = \phi(\tfrac{1}{2}(\delta_{jk}a_{ij}b_{km}E_{im}+\delta_{mi}b_{km}a_{ij}E_{kj})) = \frac{1}{2}(\delta_{jk}\varphi(a_{ij}b_{km})E_{i+\frac{n}{2},m+\frac{n}{2}}+\delta_{mi}\varphi(b_{km}a_{ij})E_{k+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2}})$$

b) $$\phi(a_{ij}E_{ij})\cdot\phi(b_{km}E_{km}) = \varphi(a_{ij})E_{i+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2}}\cdot\varphi(b_{km})E_{k+\frac{n}{2},m+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}(\delta_{j+\frac{n}{2},k+\frac{n}{2}}\varphi(a_{ij})\varphi(b_{km})E_{i+\frac{n}{2},m+\frac{n}{2}} + \delta_{m+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2}}\varphi(b_{km})\varphi(a_{ij})E_{k+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2}}) .$$

Gleichheit zwischen den rechten Seiten von a) und b) liegt, da nach Voraussetzung φ nur die Identität oder die in $\mathcal{L}_8$ gegebene Involution sein kann, für alle i,j,k,m vor, falls $\varphi=Id$ ist. In diesem Fall ist ϕ ein Automorphismus, der natürlich nur sinnvoll ist, wenn n gerade, also $n=2r$ ist.

Es gelte beide Male 2.

(ii) Wir haben in diesem Fall als Folgerung:

$E_{ii}\longrightarrow E_{i+\mu,i+\mu}$, $E_{ij}\longrightarrow E_{i+\varrho,j+\sigma}$, $E_{jj}\longrightarrow E_{j+\lambda,j+\lambda}$.

Wir haben $j+\sigma=i+\mu$ und $j+\lambda=i+\varrho$, also $j=i+\mu-\sigma$, daher $i+\mu+\lambda-\sigma=i+\varrho$, also $\sigma+\varrho=\mu+\lambda$.

Wir betrachten E_{ij},E_{ji}. Es gilt wegen (5.6) $E_{ji}\cdot E_{jj} = \frac{1}{2}E_{ji}$ und weiter $E_{ij}\cdot E_{ji} = \frac{1}{2}(E_{ii}+E_{jj})$, daher wegen

$\phi(E_{ij})\cdot\phi(E_{ji}) = \phi(E_{ij}\cdot E_{ji})$:

$E_{j+\lambda,i+\mu}\cdot E_{j+\xi,i+\eta} = \frac{1}{2}(E_{i+\mu,i+\mu}+E_{j+\lambda,j+\lambda})$, also

$\frac{1}{2}(\delta_{i+\mu,j+\xi}E_{j+\lambda,i+\eta}+\delta_{i+\eta,j+\lambda}E_{j+\xi,i+\mu}) = \frac{1}{2}(E_{i+\mu,i+\mu}+E_{j+\lambda,j+\lambda})$.

Daraus folgt $i+\mu=j+\xi$ und wegen $i+\mu=j+\sigma$: $\xi=\sigma$,
$i+\eta=j+\lambda$ und wegen $j+\lambda=i+\varrho$: $\eta=\varrho$.

Wir haben $\phi(E_{ji}) = E_{i+\mu,j+\lambda}$.

Damit haben wir gezeigt:
Durch ϕ gehen Zeilen (Spalten) in Spalten (Zeilen) über.
Wir haben aber bereits gezeigt, dass die Diagonale als Ganzes festbleibt, daher soll $\mu=\lambda$ sein. Wir haben also $E_{ij}\longrightarrow E_{j+\mu,i+\mu}$ mit festem μ für alle $i,j=1,2,\ldots,n$. Da ϕ aber eine Involution ist, gilt schliesslich $2\mu=0(\mathrm{mod}\ n)$.
Allgemein haben wir also:

$$\phi(a_{ij}E_{ij}) = \varphi(a_{ij})E_{j+\mu,i+\mu}$$

a) $$\phi(a_{ij}E_{ij}\circ b_{km}E_{km}) = \phi(\tfrac{1}{2}(\delta_{jk}a_{ij}b_{km}E_{im}+\delta_{mi}b_{km}a_{ij}E_{kj})) = \tfrac{1}{2}(\delta_{jk}\varphi(a_{ij}b_{km})E_{m+\mu,i+\mu}+\delta_{mi}\varphi(b_{km}a_{ij})E_{j+\mu,k+\mu}$$

b) $$\phi(a_{ij}E_{ij})\circ\phi(b_{km}E_{km}) = \varphi(a_{ij})E_{j+\mu,i+\mu}\circ\varphi(b_{km})E_{m+\mu,k+\mu} = \tfrac{1}{2}(\delta_{i+\mu,m+\mu}\varphi(a_{ij})\varphi(b_{km})E_{j+\mu,k+\mu}+\delta_{k+\mu,j+\mu}\varphi(b_{km})\varphi(a_{ij})E_{m+\mu,i+\mu}).$$

Gleichheit zwischen den rechten Seiten von a) und b) liegt, da nach Voraussetzung φ nur die Identität oder die in $\mathcal{L}_8$ gegebene Involution sein kann, für alle i,j,k,m vor, falls φ die Involution von $\mathcal{L}_8$ ist.
Wir haben also die beiden Automorphismen gefunden:

$\phi: a_{ij}E_{ij}\longrightarrow\overline{a_{ij}}E_{ji}$ und

$\phi: a_{ij}E_{ij}\longrightarrow\overline{a_{ij}}E_{j+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2}}$.

Der letztere ist natürlich wiederum nur für gerades n, also $n=2r$ sinnvoll.

(iii) Es gelte einmal 1. und einmal 2.
Es folgt sofort $\mu=\varrho$ und $j+\sigma\neq i+\mu$,
$j+\lambda=i+\varrho$ und $\sigma\neq\lambda$.
Daher:

$$\phi(E_{jj}) = E_{j+\lambda,j+\lambda} = E_{i+\varrho,i+\varrho} = \phi(E_{ii}),$$

also wegen $\phi^2=\mathrm{Id}$: $E_{ii} = E_{jj}$, Widerspruch für $i\neq j$.
Es existieren also die folgenden involutorischen Permutationsautomorphismen:

ϕ_1: $a_{ij}E_{ij}\longrightarrow a_{ij}E_{i+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2}}$

ϕ_2: $a_{ij}E_{ij}\longrightarrow\overline{a_{ij}}E_{j+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2}}$ nur für $n=2r$ sinnvoll

ϕ_3: $a_{ij}E_{ij}\longrightarrow\overline{a_{ij}}E_{ji}$

ϕ_4: $a_{ij}E_{ij}\longrightarrow a_{ij}E_{ij}$, $\phi_4=\mathrm{Id}$

Diese Automorphismen bilden eine Gruppe G.
Es sei n ungerade: $G=\{\mathrm{Id},\phi_3\}$ ist wegen $\phi_3{}^2=\mathrm{Id}$, also $\phi_3{}^{-1}=\phi_3$ eine Gruppe.

Es sei n gerade: $G=\{\mathrm{Id},\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ ist wegen $\phi_i{}^2=\mathrm{Id}$, also $\phi_i{}^{-1}=\phi_i$, $i=1,2,3$ und $\phi_1\phi_3=\phi_3\phi_1=\phi_2$, $\phi_2\phi_3=(\phi_1\phi_3)\phi_3=\phi_3(\phi_3\phi_1)=\phi_3\phi_2=\phi_1$, $\phi_1\phi_2=\phi_1(\phi_1\phi_3)=(\phi_3\phi_1)\phi_1=\phi_2\phi_1=\phi_3$ eine Gruppe mit der Untergruppe $U=\{\mathrm{Id},\phi_3\}$.

4. Es sei n ungerade.
Die unter G festbleibenden Elemente von $\mathcal{L}_{8,n}(\circ)$ sind genau diejenigen, die unter ϕ_3 festbleiben. Da ϕ_3 als involutorischer Permutationsautomorphismus ein involutorischer Automorphismus ist, besitzt ϕ_3 nur die Eigenwerte $+1,-1$. Die Algebra $\mathcal{L}_{8,n}(\circ)$ zerfällt daher additiv direkt in die Teilalgebra der unter ϕ_3 festbleibenden Elemente, die wir mit $\mathfrak{h}_n^+=\mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8)$ bezeichnen, und den Teilraum der Elemente, die auf ihr Negatives abgebildet werden, den wir mit $\mathfrak{h}_n^-=\mathfrak{h}_n^-(\mathcal{L}_8)$ bezeichnen, also $\mathcal{L}_{8,n} = \mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8)\oplus\mathfrak{h}_n^-(\mathcal{L}_8)$.
Für ein $A\in\mathcal{L}_{8,n}(\circ)$ bedeutet das: $A = \frac{1}{2}(A+\phi_3(A))+\frac{1}{2}(A-\phi_3(A))$.
Für ein Element $X = \sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}E_{ij}$ aus $\mathfrak{h}_n^+$ gilt also

$$\phi_3(X) = \phi_3(\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n}\phi_3(x_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n}\overline{x_{ij}}E_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}E_{ij} = X,$$

also

(5.8) $$x_{ji} = \overline{x_{ij}},$$

daher

(5.9) $$x_{ii} = \overline{x_{ii}} = \xi_i\in K.$$

Ein X aus $\mathfrak{h}_n^+$ lässt sich also in der Form

(5.10) $$X = \sum_{i=1}^{n}\xi_iE_{ii}+\sum_{i<j}x_{ij}E_{ij}+\sum_{i<j}\overline{x_{ij}}E_{ji}$$

darstellen.
Für ein Element $Y = \sum_{i,j=1}^{n}y_{ij}E_{ij}$ aus $\mathfrak{h}_n^-$ gilt entsprechend

$$\phi_3(Y) = \phi_3(\sum_{i,j=1}^{n}y_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n}\phi_3(y_{ij}E_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{n}\overline{y_{ij}}E_{ji} = -\sum_{i,j=1}^{n}y_{ij}E_{ij} = -Y,$$

also $y_{ji} = -\overline{y_{ij}}$, daher $y_{ii} = -\overline{y_{ii}}$, $y_{ii} = y_i' \in \mathcal{L}$ mit $\mathfrak{L} = K \bullet \mathcal{L}$ .Ein $Y \in \mathfrak{h}_n^-$ ist also von der Form

$$(5.11) \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i' E_{ii} + \sum_{i<j} y_{ij} E_{ij} - \sum_{i<j} \overline{y_{ij}} E_{ji} \ .$$

5. Es sei n gerade.

Die unter G festbleibenden Elemente von $\mathcal{L}_{8,n}(\circ)$ sind genau diejenigen, die sowohl unter ϕ_1 als auch unter ϕ_3 festbleiben, da die unter ϕ_1 und ϕ_3 festbleibenden Elemente auch unter dem Produkt $\phi_1\phi_3 = \phi_3\phi_1 = \phi_2$ festbleiben. Diese Elemente bilden somit, da ϕ_1 ebenfalls ein involutorischer Automorphismus von $\mathcal{L}_{8,n}(\circ)$, also von $\mathfrak{h}_n^+$ ist, eine Teilalgebra von $\mathfrak{h}_n^+$, die wir mit $\mathfrak{h}_n^{++} = \mathfrak{h}_n^{++}(\mathcal{L}_{8,n}(\circ))$ bezeichnen.

$\mathfrak{h}_n^+$ lässt sich also in zu $\mathcal{L}_{8,n}$ analoger Weise additiv direkt zerlegen in die Teilalgebra $\mathfrak{h}_n^{++}$ und den Teilraum $\mathfrak{h}_n^{+-}$, also

$\mathfrak{h}_n^+ = \mathfrak{h}_n^{++} \oplus \mathfrak{h}_n^{+-}$.

Für ein Element $X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} E_{ij}$ aus $\mathfrak{h}_n^{++}$ gilt also

$$\phi_3(X) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{x_{ij}} E_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} E_{ij} = X, \quad \phi_1(X) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} E_{i+\frac{n}{2}, j+\frac{n}{2}} = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} E_{ij} = X \ ,$$

aus $\phi_3(X) = X$ folgt daher die erste, aus $\phi_1(X) = X$ die zweite Bedingung von

$$(5.12) \qquad x_{ji} = \overline{x_{ij}} \quad \text{und} \quad x_{ij} = x_{i+\frac{n}{2}, j+\frac{n}{2}}$$

daher auch $x_{ii} = \overline{x_{ii}}$ und $x_{ii+\frac{n}{2}} = x_{i+\frac{n}{2}, i+n} = x_{i+\frac{n}{2}, i} = \overline{x_{ii+\frac{n}{2}}}$,
also

$$(5.13) \qquad x_{i+\frac{n}{2}, i+\frac{n}{2}} = x_{ii} = \xi_i \in K \quad \text{und} \quad x_{ii+\frac{n}{2}} = \xi_i' \in K \ .$$

Wir haben: Die unter G festbleibenden Elemente von $\mathcal{L}_{8,n}(\circ)$ bilden die Teilalgebra $\mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8)$ beziehungsweise $\mathfrak{h}_n^{++}(\mathcal{L}_8)$, je nachdem, ob n ungerade oder gerade ist.

Wir zeigen

<u>Satz 5.3: Die unter $U = \{Id, \phi_3\}$ festbleibenden Elemente von $\mathcal{L}_{8,n}$ bilden eine zentral-einfache Algebra mit symmetrischer, assoziativer und nichtausgearteter Linearform.</u>

Beweis: Für ungerades n ist U = G. Die unter U festbleibenden Elemente bilden die Algebra $\mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8)$ der Hermiteschen nxn-Matrizen mit

Elementen aus $\mathcal{L}_8$.

$\mathfrak{h}_n^+$ ist einfach.

Denn: Das ist trivial für n=1.Es sei also n≥2. Wir können den Beweis der Einfachheit von $\mathcal{L}_{8,n}$ direkt übernehmen - da die dort verwendeten Elemente Y,X,Z in $\mathfrak{h}_n^+$ liegen -, wenn wir bedenken, dass $a_{mk} = \overline{a_{km}}$ gilt.

$\mathfrak{h}_n^+$ ist zentral.

Denn: Das ist trivial für n=1.Es sei also n≥2. $\mathfrak{Z}$ sei das Zentrum von $\mathfrak{h}_n^+$. Für ein Element $A \in \mathfrak{Z}$ gilt nach Def.4.2:

$A \circ (X \bullet Y) = (X \bullet Y) \circ A = X \bullet (A \circ Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{h}_n^+$. Für $X = E_{kk}$, $Y = E_{mm}$ mit $m \neq k$ haben wir $X \bullet Y = 0$, daher $X \circ (A \circ Y) = 0$.

Andererseits war

$X \bullet (Y \bullet A) = \frac{1}{4}(a_{km}E_{km} + a_{mk}E_{mk}) = \frac{1}{4}(a_{km}E_{km} + \overline{a_{km}}E_{mk})$, da $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$ aus $\mathfrak{h}_n^+$. Somit $(a_{km}E_{km} + \overline{a_{km}}E_{mk}) = 0$, daher $a_{km} = 0$ für alle $k \neq m$. $\mathfrak{Z}$ ist also eine Teilmenge der Teilalgebra $\mathfrak{h}_n^+(K)$ und daher im Zentrum von $\mathfrak{h}_n^+(K)$ enthalten. Das ist aber K selbst.

$\Lambda: A \longrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}A + \mathrm{Spur}\overline{A})$ ist eine symmetrische und assoziative Linearform auf $\mathfrak{h}_n^+$.

Denn: Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{h}_n^+$. Da $a_{ii} = \alpha_i \in K$ ist, haben wir $\mathrm{Spur}A = \mathrm{Spur}\overline{A}$, also $\Lambda(A) = \mathrm{Spur}A$.

Da Λ auf $\mathcal{L}_{8,n}$ symmetrisch und assoziativ ist, ist Λ symmetrisch und assoziativ auf $\mathfrak{h}_n^+$.

Λ ist nichtausgeartet auf $\mathfrak{h}_n^+$.

Denn: Da $E_{ii} \in \mathfrak{h}_n^+$ läuft der Beweis genau wie für $\mathcal{L}_{8,n}$.

Es sei nun n gerade.

Die unter G festbleibenden Elemente bilden die Algebra $\mathfrak{h}_n^{++}$.

Wir zeigen

<u>Satz 5.4: Λ ist eine auf $\mathfrak{h}_n^{++}$ nichtausgeartete symmetrische und assoziative Linearform.</u>

Beweis: Als Restriktion von Λ auf $\mathfrak{h}_n^+$ ist Λ symmetrisch und assoziativ.

Λ ist nichtausgeartet.

Denn: Es sei $A \in \mathfrak{h}_n^{++}$, es folgt wegen (5.12),(5.13) $\Lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$; mit den Randbedingungen (5.12),(5.13) für die a_{ij} lässt sich für $A \in \mathrm{Bk}_\Lambda(\mathfrak{h}_n^{++})$, also $\Lambda(A \bullet X) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{h}_n^{++}$, schreiben $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$.
Wir können annehmen, dass n≠2 ist, denn der Satz ist für n=2 nahe-

zu trivial.

Dann aber gibt es k,m mit $k \neq m, m+\frac{n}{2}$. Für ein solches Paar k,m sei
$B = (b_{km}E_{km}+b_{mk}E_{mk}+b_{km}E_{k+\frac{n}{2},m+\frac{n}{2}}+b_{mk}E_{m+\frac{n}{2},k+\frac{n}{2}})$, $B \in \mathfrak{h}_n^{++}$.

Es folgt

$$A \circ B = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_i a_{ik}b_{km}E_{im}+\sum_i a_{im}b_{mk}E_{ik}+\sum_i a_{ik+\frac{n}{2}}b_{km}E_{im+\frac{n}{2}}+\sum_i a_{im+\frac{n}{2}}b_{mk}E_{ik+\frac{n}{2}}+$$
$$+\sum_j b_{km}a_{mj}E_{kj}+\sum_j b_{mk}a_{kj}E_{mj}+\sum_j b_{km}a_{m+\frac{n}{2},j}E_{k+\frac{n}{2},j}+\sum_j b_{mk}a_{k+\frac{n}{2},j}E_{m+\frac{n}{2},j}\Big).$$

Daher

$$\Lambda(A \circ B) = \tfrac{1}{2}(a_{mk}b_{km}+a_{km}b_{mk}+a_{m+\frac{n}{2},k+\frac{n}{2}}b_{km}+a_{k+\frac{n}{2},m+\frac{n}{2}}b_{mk}+$$
$$+b_{km}a_{mk}+b_{mk}a_{km}+b_{km}a_{m+\frac{n}{2},k+\frac{n}{2}}+b_{mk}a_{k+\frac{n}{2},m+\frac{n}{2}}) =$$
$$= (\overline{a_{km}}b_{km}+a_{km}\overline{b_{km}}+b_{km}\overline{a_{km}}+\overline{b_{km}}a_{km}) = 4\,(a_{km}\overline{b_{km}}) = 0.$$

Da wir uns auf nichtausgeartete Linearformen λ beschränkt hatten, folgt $a_{km}=0$ für $k \neq m, m+\frac{n}{2}$.

Setzen wir $b_{km}=1$ in B und lassen die Einschränkung über k,m fallen, so erhalten wir

$\Lambda(A \circ B) = 4\lambda(a_{km}) = 0$. Für $k=m$ folgt $a_{mm}=\alpha_m=0$,
für $k=m+\frac{n}{2}$ folgt $a_{m+\frac{n}{2},m}=a_{mm+\frac{n}{2}}=\alpha'_m=0$.

Insgesamt haben wir $A=0$, daher $Bk_\Lambda(\mathfrak{h}_n^{++}) = 0$. Λ ist nichtausgeartet.

6. Def.5.2: Ein Element $e \neq 0$ einer Algebra $\mathfrak{A}$ heisst Idempotent, wenn $e^2=e$ gilt.

Besitzt $\mathfrak{A}$ ein Einselement 1, so heisse ein System $e_1,e_2,\dots,e_m$ von Idempotenten der Algebra $\mathfrak{A}$ ein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter der Länge m, wenn gilt

$e_ie_j = 0$ für $i \neq j$ und $\sum_{i=1}^{m} e_i = 1$.

Es sei $E_1,E_2,\dots,E_m$ ein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter der Algebra $\mathfrak{h}$ mit Einselement E. (Bezeichnungen nach [6])

Dieses System möge die folgenden Eigenschaften besitzen:

(e)
1. $L(E_i) \circ L(E_j) = L(E_j) \circ L(E_i)$
2. $L(E_i) \circ L(E_j) = 2L^2(E_i) \circ L(E_j)$ für $j \neq i$
3. $3L^2(E_i) - L(E_i) = 2L^3(E_i)$
4. $L(E_i) \circ L(E_j) \circ L(E_k) = 0$ für $i,j,k \neq$

worin $L(X): Y \longrightarrow X \circ Y$ die linksreguläre Darstellung sei.

Behauptung: $C_{ik} = C_{ki} = 4L(E_i) \circ L(E_k)$, $i \neq k$ und
$C_{kk} = P(E_k) = 2L^2(E_k) - L(E_k)$

sind orthogonale Idempotente des von den $L(E_i)$ erzeugten kommutativen und assoziativen Ringes $\mathcal{L}$.

Denn:

$\mathcal{L}$ ist wegen 1. kommutativ und assoziativ.

$$C_{ik}^2 = 16L(E_k) \circ L(E_i) \circ L(E_k) \circ L(E_i) = 16L^2(E_k) \circ L^2(E_i) =$$
$$= 16L(E_k) \circ (L(E_k) \circ L^2(E_i)) = 8L^2(E_k) \circ L(E_i) =$$
$$= 4L(E_i) \circ L(E_k) = C_{ik}.$$

$$C_{kk}^2 = (2L^2(E_k)-L(E_k)) \circ (2L^2(E_k)-L(E_k)) = 4L^4(E_k)-4L^3(E_k)+L^2(E_k) =$$
$$= 4L^4(E_k)-6L^3(E_k)+4L^2(E_k)-L(E_k) =$$
$$= L(E_k) \circ (4L^3(E_k)-6L^2(E_k)+4L(E_k)-Id) =$$
$$= L(E_k) \circ (2L(E_k)-Id) = 2L^2(E_k)-L(E_k) = C_{kk}.$$

nach zweimaliger Anwendung von Eigenschaft 3.

Es gilt

$$C_{kk} \circ C_{ii} = (2L^2(E_k)-L(E_k)) \circ (2L^2(E_i)-L(E_i)) =$$
$$= 4L^2(E_i) \circ L^2(E_k) - 2L^2(E_k) \circ L(E_i) +$$
$$+ L(E_k) \circ L(E_i) - 2L(E_k) \circ L^2(E_i) =$$
$$= 2L^2(E_k) \circ L(E_i) - 2L^2(E_k) \circ L(E_i) +$$
$$+ L(E_k) \circ L(E_i) - L(E_k) \circ L(E_i) = 0,$$

nach Eigenschaft 2. für $i \neq k$.

$$C_{ij} \circ C_{kk} = (2L^2(E_k)-L(E_k)) \circ (4L(E_i) \circ L(E_j)) =$$
$$= 8L^2(E_k) \circ L(E_i) \circ L(E_j) - 4L(E_k) \circ L(E_i) \circ L(E_j) = 0$$

nach Eigenschaft 2. für $i \neq j$.

Mit Eigenschaft 4. ergibt sich sofort

$$C_{ij} \circ C_{km} = 16L(E_i) \circ L(E_j) \circ L(E_k) \circ L(E_m) = 0$$

für $i \neq j$, $k \neq m$, $(i,j) \neq (k,m)$.

Da die Summe der Idempotenten E_i, $i=1,2,\dots,m$ E ergibt, erhalten wir weiter

$$L(E_k) = L(E_k)\circ L(E) = L(E_k)\circ\sum_{i=1}^{m}L(E_i) = L^2(E_k)+\tfrac{1}{4}\sum_{i\neq k}C_{ik} =$$
$$= \tfrac{1}{2}C_{kk}+\tfrac{1}{2}L(E_k)+\tfrac{1}{4}\sum_{i\neq k}C_{ik}\ ,$$

also

$$(5.14)\qquad L(E_k) = C_{kk}+\tfrac{1}{2}\sum_{i\neq k}C_{ik}\ ,$$

daher

$$\sum_{k=1}^{m}L(E_k) = \sum_{k=1}^{m}C_{kk}+\tfrac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq k\\ k}}C_{ik}\ ,\ \text{daher}$$

$$(5.15)\qquad Id = \sum_{k\leq i}C_{ik}\ .$$

Somit lässt sich jedes Element von $\mathcal{L}$ durch die C_{ik} linear darstellen und zwar eindeutig durch die von Null verschiedenen, was aus der Orthogonalität der C_{ik} folgt.
Man findet $C_{ik}\circ\mathcal{L} = KC_{ik}$. (Die von Null verschiedenen C_{ik} sind also primitiv) .
Ausserdem gilt $C_{kk}\circ E = E_k^{\,2} = E_k \neq 0$, also $C_{kk}\neq 0$.
Wir setzen $\mathfrak{h}_{km} = C_{km}\circ\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{mk}$.
Es sei $X\in\mathfrak{h}$, also $X = \sum_{k\leq m}C_{km}\circ X$, daher $\mathfrak{h} = \sum_{k\leq m}\mathfrak{h}_{km}$. Offenbar gilt für $X_{km}\in\mathfrak{h}_{km}$, etwa $X_{km} = C_{km}\circ X$:

$$C_{ij}\circ X_{km} = C_{ij}\circ C_{km}\circ X = \begin{cases} X_{km} & \text{für } (i,j)=(k,m)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Ist $X = \sum_{k\leq m}X_{km}$ irgendeine Darstellung von X, so folgt $C_{ij}\circ X = X_{ij}$.
Die X_{ij} sind also eindeutig durch X bestimmt, die Summe

$$\mathfrak{h} = \sum_{k\leq m}\mathfrak{h}_{km}$$

ist direkt, sie stellt die Peirce-Zerlegung von $\mathfrak{h}$ bezüglich $E_1,E_2,\ldots,E_m$ dar.
Wir haben also gesehen: Besitzt das vollständige Orthogonalsystem $E_1,E_2,\ldots,E_m$ die Eigenschaften (e), so lässt sich die Algebra $\mathfrak{h}$ in Bezug auf dieses System nach Peirce zerlegen.

Es sei nun $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8)$.
Wegen (5.7) gilt für die Matrixeinheiten E_{ij} von $\mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8)$ $E_{ij}^{\,2} = E_{ij}$ genau für i=j und wegen (5.1) gilt $E_{ii}\circ E_{jj} = 0$ für $i\neq j$, schliesslich $\sum_{i=1}^{n}E_{ii} = E$.
Die Matrixeinheiten E_{ii}, i=1,2,...,n bilden daher ein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter der Länge n und das einzige un-

ter den n^2 Matrixeinheiten. Wir zeigen, dass das System E_{ii} , i=1,2,...,n die Eigenschaften (e) besitzt. Hierzu setzen wir $E_{ii} = E_I$.
Wir beweisen die Eigenschaft 1.
Die nachzuweisende Identität $L(E_I)\circ L(E_J) = L(E_J)\circ L(E_I)$ ist trivial für i=j, also I=J. Es sei also $I\neq J$, es gilt:

$$E_I\circ(E_J\circ X) = \tfrac{1}{4}(E_I(E_JX+XE_J)+(E_JX+XE_J)E_I) = \tfrac{1}{4}(E_I(E_JX)+E_I(XE_J)+(E_JX)E_I+$$
$$+(XE_J)E_I) = \tfrac{1}{4}(E_I(XE_J)+(E_JX)E_I) = \tfrac{1}{4}((E_IX)E_J+E_J(XE_I))$$

für alle $X\in\mathfrak{h}_n^+$, da $E_IE_J = 0$ und die E_I im Nukleus von $\mathcal{L}_{8,n}$ liegen.
Andererseits gilt:

$$E_J\circ(E_I\circ X) = \tfrac{1}{4}(E_J(E_IX)+E_J(XE_I)+(E_IX)E_J+(XE_I)E_J) = \tfrac{1}{4}(E_J(XE_I)+(E_IX)E_J).$$

Wir beweisen Eigenschaft 2.
Es sei $I\neq J$. Dann gilt:

$$(2L^2(E_I)\circ L(E_J)-L(E_J)\circ L(E_I))\circ X = 2E_I\circ(E_I\circ(E_J\circ X))-E_I\circ(E_J\circ X) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(E_I(E_I(E_JX+XE_J)+(E_JX+XE_J)E_I)+(E_I(E_JX+XE_J)+(E_JX+XE_J)E_I)E_I-$$
$$-E_I(E_JX+XE_J)-(E_JX+XE_J)E_I) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(E_I(XE_J)+E_I((E_JX)E_I)+(E_I(XE_J))E_I+(E_JX)E_I-E_I(XE_J)-(E_JX)E_I)$$
$$= \tfrac{1}{4}(E_I(E_J(XE_I))+((E_IX)E_J)E_I) = 0$$

für alle $X\in\mathfrak{h}_n^+$.

Wir beweisen Eigenschaft 3.

$$(2L^3(E_I)-3L^2(E_I)+L(E_I))\circ X = 2E_I\circ(E_I\circ(E_I\circ X))-3E_I\circ(E_I\circ X)+E_I\circ X =$$
$$= \tfrac{1}{4}(E_I(E_I(E_IX+XE_I)+(E_IX+XE_I)E_I)+(E_I(E_IX+XE_I)+(E_IX+XE_I)E_I)E_I)-$$
$$-\tfrac{3}{4}(E_I(E_IX+XE_I)+(E_IX+XE_I)E_I)+\tfrac{1}{2}(E_IX+XE_I) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(E_IX+E_I(XE_I)+E_I(XE_I)+E_I(XE_I)+E_I(XE_I)+E_I(XE_I)+E_I(XE_I)+XE_I)-$$
$$-\tfrac{3}{4}(E_IX+E_I(XE_I)+E_I(XE_I)+XE_I)+\tfrac{1}{2}(E_IX+XE_I) =$$
$$= \tfrac{1}{4}(E_IX+XE_I)+\tfrac{6}{4}(E_I(XE_I))-\tfrac{3}{4}(E_IX+XE_I)-\tfrac{6}{4}(E_I(XE_I))+\tfrac{1}{2}(E_IX+XE_I) = 0.$$

Wir beweisen Eigenschaft 4.
$L(E_I)\circ L(E_J)\circ L(E_K) = 0$, da die E_I im Nukleus von $\mathcal{L}_{8,n}$ liegen.

Berechnet man $X_{km} = C_{km} \circ X$, $X \in \mathfrak{h}_n^+$, so ergibt sich für $k \neq m$ wegen $4L(E_K) \cdot L(E_M) \cdot X = E_K(XE_M) + E_M(XE_K)$:

$$(5.16) \quad X_{km} = x_{km}E_{km} + \overline{x_{km}}E_{mk}$$

und für $k=m$ wegen $(2L^2(E_K) - L(E_K)) \cdot X = E_K(XE_K)$:

$$(5.17) \quad X_{kk} = \xi_k E_{kk}$$

Die Peirce-Zerlegung bezüglich E_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$ stellt also die Zerlegung

$$(5.18) \quad X = \sum_{k \leq m} C_{km} \circ X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i E_{ii} + \sum_{i<j=2}^{n} X_{ij}$$

dar.

Die $\mathfrak{h}_{km}$ dieser Zerlegung stehen in den folgenden Beziehungen zueinander:

$$\mathfrak{h}_{ij} \circ \mathfrak{h}_{km} = 0, \text{ falls die Indexpaare keine Ziffer gemein haben}$$

$$(5.19) \quad \mathfrak{h}_{ij} \circ \mathfrak{h}_{ik} \subset \mathfrak{h}_{jk} \text{ für alle } i,j,k \text{ mit } j \neq k$$

$$\mathfrak{h}_{km} \circ \mathfrak{h}_{km} \subset \mathfrak{h}_{kk} + \mathfrak{h}_{mm} \text{ für alle } k,m$$

Denn mit $X_{ij} = x_{ij}E_{ij} + \overline{x_{ij}}E_{ji}$, $Y_{km} = y_{km}E_{km} + \overline{y_{km}}E_{mk}$ bestätigt man sofort $X_{ij} \circ Y_{km} = 0$, wenn (i,j) und (k,m) keine Ziffer gemein haben,

$X_{ij} \circ Y_{im} \in \mathfrak{h}_{jk}$ für alle i,j,k mit $j \neq k$

$X_{km} \circ Y_{km} \in \mathfrak{h}_{kk} + \mathfrak{h}_{mm}$ für alle k,m.

Wir schliessen eine Dimensionsbetrachtung an:

Die Abbildung $x_{ij} \longrightarrow X_{ij} = x_{ij}E_{ij} + \overline{x_{ij}}E_{ji}$ ist offenbar eine nichtsinguläre Abbildung von $\mathcal{L}_8$ auf $\mathfrak{h}_{ij}$.

Die $\mathfrak{h}_{ij}$ haben alle dieselbe Dimension und $\dim \mathfrak{h}_{ij} = \dim \mathcal{L}_8$.

Die Abbildung $\xi_i \longrightarrow \xi_i E_{ii} = X_{ii}$ ist eine lineare Abbildung von K auf $\mathfrak{h}_{ii}$ und somit $\dim \mathfrak{h}_{ii} = 1$.

Wegen $\mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8) = \sum_{k \leq m} \mathfrak{h}_{km}$ erhalten wir

$$(5.20) \quad \dim \mathfrak{h}_n^+(\mathcal{L}_8) = n + \tfrac{1}{2}n(n-1)\dim \mathcal{L}_8 .$$

Es sei $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_n^{++}(\mathcal{L}_8)$, n also gerade, und es sei $n \neq 2$.

Das System $E_i = E_{ii} + E_{i+\frac{n}{2}, i+\frac{n}{2}}$, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ ist ein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter der Länge $\frac{n}{2}$ von $\mathfrak{h}_n^{++}$.

Denn ist $E_i \neq E_j$, so gilt $E_{ii} \neq E_{jj}, E_{j+\frac{n}{2}, j+\frac{n}{2}}$.

Das System E_i, $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$ besitzt die Eigenschaften (e).

enn setzen wir wieder $E_{ii} = E_I$ und $E_{i+\frac{n}{2}, i+\frac{n}{2}} = E_{I+\frac{N}{2}}$, so gilt

., da L eine lineare Abbildung ist und 1. für das System E_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$ erfüllt ist.

. genau dann, wenn

$$(L(E_I) + L(E_{I+\frac{N}{2}})) \circ (L(E_J) + L(E_{J+\frac{N}{2}})) =$$
$$= (2L^2(E_I) + 4L(E_I) \cdot L(E_{I+\frac{N}{2}}) + 2L^2(E_{I+\frac{N}{2}})) \circ (L(E_J) + L(E_{J+\frac{N}{2}}))$$

ilt, also, da 2. für das System E_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$ gilt, genau dann, enn

$$L(E_I) \cdot L(E_J) \cdot L(E_{I+\frac{N}{2}}) = L(E_I) \cdot L(E_{I+\frac{N}{2}})\, L(E_{J+\frac{N}{2}}) = 0$$

rfüllt ist.

egen $i,j,i+\frac{n}{2} \neq$ ist das aber eine Folge der Eigenschaft 4. für das ystem E_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$.

. falls

$$3L^2(E_I + E_{I+\frac{N}{2}}) - L(E_I + E_{I+\frac{N}{2}}) - 2L^3(E_I + E_{I+\frac{N}{2}}) =$$
$$= 3L^2(E_I) + 3L^2(E_{I+\frac{N}{2}}) + 6L(E_I) \cdot L(E_{I+\frac{N}{2}}) - L(E_I) - L(E_{I+\frac{N}{2}}) -$$
$$-2L^3(E_I) - 2L^3(E_{I+\frac{N}{2}}) - 6L^2(E_I) \cdot L(E_{I+\frac{N}{2}}) - 6L(E_I) \cdot L^2(E_{I+\frac{N}{2}}) = 0.$$

rfüllt ist. Da aber 2. für das System E_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$ gilt, ist as der Fall.

., da L eine lineare Abbildung ist und 4. für das System E_{ii}, $i=1,2,\ldots,n$ erfüllt ist.

s gilt

$$X_{km} = C_{km} \circ X = 4L(E_K + E_{K+\frac{N}{2}}) \cdot L(E_M + E_{M+\frac{N}{2}}) \cdot X =$$
$$= E_K(XE_M) + E_M(XE_K) + E_K(XE_{M+\frac{N}{2}}) + E_{M+\frac{N}{2}}(XE_K) + E_{K+\frac{N}{2}}(XE_M) + E_M(XE_{K+\frac{N}{2}}) +$$
$$+ E_{K+\frac{N}{2}}(XE_{M+\frac{N}{2}}) + E_{M+\frac{N}{2}}(XE_{K+\frac{N}{2}}) .$$

lso

$$(5.21) \quad X_{km} = x_{km}(E_{km} + E_{k+\frac{n}{2}, m+\frac{n}{2}}) + \overline{x_{km}}(E_{mk} + E_{m+\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}}) +$$
$$+ x_{km+\frac{n}{2}}(E_{km+\frac{n}{2}} + E_{k+\frac{n}{2}, m}) + \overline{x_{km+\frac{n}{2}}}(E_{m+\frac{n}{2}, k} + E_{mk+\frac{n}{2}})$$

nd

$$X_{kk} = C_{kk} \circ X = (2L^2(E_K + E_{K+\frac{N}{2}}) - L(E_K + E_{K+\frac{N}{2}})) \circ X =$$
$$= E_K(XE_K) + E_{K+\frac{N}{2}}(XE_{K+\frac{N}{2}}) + 4L(E_K) \cdot L(E_{K+\frac{N}{2}}) \cdot X \text{ . Also}$$

$$(5.22) \quad X_{kk} = \xi_k(E_{kk} + E_{k+\frac{n}{2}, k+\frac{n}{2}}) + \xi'_k(E_{kk+\frac{n}{2}} + E_{k+\frac{n}{2}, k})$$

Wir schliessen eine Dimensionsbetrachtung an:
Für die obige Zerlegung gilt offenbar

$\dim\mathfrak{h}_{km} = 2\dim\mathcal{C}_8$ für $k\neq m$,

$\dim\mathfrak{h}_{kk} = 2$.

Daher

(5.23) $$\dim\mathfrak{h}_n^{++}(\mathcal{C}_8) = \frac{n}{2}+\frac{n}{2}+\frac{n^2-n}{4}\dim\mathcal{C}_8-\frac{n}{4}\dim\mathcal{C}_8 = n+\frac{n(n-2)}{4}\dim\mathcal{C}_8 .$$

7. Im Folgenden gehen wir etwas näher auf die einzelnen n ein.

Es sei $n=1$.

$\mathcal{C}_{8,1}$ ist isomorph zu $\mathcal{C}_8$. G besteht aus der Identität und dem in $\mathcal{C}_8(\cdot)$ über die Involution $x\longrightarrow\bar{x}$ von $\mathcal{C}_8$ gegebenen involutorischen Automorphismus. $\mathfrak{h}_1^+(\mathcal{C}_8)$ ist daher isomorph zu dem kommutativen Körper K.

Es sei $n=2$.

G besteht aus vier Elementen. $\mathcal{C}_{8,2}$ ist die Algebra der 2x2-Matrizen mit Elementen in $\mathcal{C}_8$ und der Multiplikation $(\cdot)$. Wegen (5.12) (5.13) gilt für die Elemente $X = \sum_{i,j=1}^{2}x_{ij}E_{ij}$ aus $\mathfrak{h}_2^{++}(\mathcal{C}_8)$

$x_{11}=\xi$, $x_{12}=\xi'$, $x_{21}=\overline{x_{12}}=\xi'$, $x_{22}=x_{1+1,1+1}=\overline{x_{11}}=\xi$.

$\mathfrak{h}_2^{++}(\mathcal{C}_8)$ ist bezüglich $(\cdot)$ nach §4 eine spezielle Jordan-Algebra.

Die unter der Untergruppe $U = \{Id, \phi_3\}$ von G festbleibenden Elemente X von $\mathcal{C}_{8,2}$ haben wegen (5.10) die Form

(5.24) $$X = \xi_1E_{11}+\xi_2E_{22}+x_{12}E_{12}+\overline{x_{12}}E_{21} .$$

Es sei $n=3$.

G besteht aus Id und ϕ_3.

$\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ ist die Teilalgebra der Hermiteschen 3x3-Matrizen mit Elementen in $\mathcal{C}_8$ von $\mathcal{C}_{8,3}(\cdot)$. Wegen (5.10) lässt sich ein Element $X\in\mathfrak{h}_3^+$ in der Form

(5.25) $$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_{12} & x_{13} \\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23} \\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad \xi_i\in K,\ x_{ij}\in\mathcal{C}_8,\ i,j=1,2,3,\ i<j$$

darstellen. Abkürzend genügt es also zur Charakterisierung der unter G festen Elemente X

(5.26) $$X = (\xi_1,\xi_2,\xi_3;x_{12},x_{13},x_{23}),\quad \xi_i\in K,\ x_{ij}\in\mathcal{C}_8$$

zu schreiben.

Es gilt der z.B. in [6,VII,6] bewiesene wichtige

Satz 5.5: $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ ist eine zentraleinfache Jordan-Algebra.

Es sei $n\geq 4$.

Lemma 5.3: Die zentral-einfache, bezüglich der Linearform Λ nichtausgeartete Algebra $\mathfrak{h}_n^+$ ist nicht potenzassoziativ.

Beweis: In [6,VIII,Lemma 8.2] wurde gezeigt, dass $\mathfrak{h}_n^+(\mathfrak{A})$ im Falle $n\geq 4$ höchstens dann eine Jordan-Algebra ist, wenn $\mathfrak{A}$ assoziativ ist. Da $\mathcal{C}_8$ nicht assoziativ ist, ist $\mathfrak{h}_n^+(\mathcal{C}_8)$ keine Jordan-Algebra. Da andererseits Λ nichtausgeartet ist auf $\mathfrak{h}_n^+$, kann $\mathfrak{h}_n^+$ auch nicht potenzassoziativ sein. Denn es gilt der in [6,I,6] bewiesene

Satz 5.6: Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative potenzassoziative Algebra über einem kommutativen Körper K mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik. Gibt es eine assoziative und nichtausgeartete Linearform auf $\mathfrak{A}$ mit Werten in K, so ist $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra.

Es sei $n=4$.

G besteht aus vier Elementen. Die unter $U = \{Id, \phi_3\}$ festbleibenden Elemente bilden die Teilalgebra $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ der Hermiteschen 4x4-Matrizen mit Elementen in $\mathcal{C}_8$ von $\mathcal{C}_{8,4}$. Wegen (5.10) lässt sich ein Element $X\in\mathfrak{h}_4^+$ in der Form

(5.27) $$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23} & x_{24} \\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3 & x_{34} \\ \overline{x_{14}} & \overline{x_{24}} & \overline{x_{34}} & \xi_4 \end{pmatrix} \qquad \xi_i\in K,\ x_{ij}\in\mathcal{C}_8,\ i,j=1,2,3,4,\ i<j.$$

darstellen. Abkürzend genügt es zur Charakterisierung der unter U festbleibenden Elemente

(5.28) $$X = (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24},x_{34}),\quad \xi_i\in K,\ x_{ij}\in\mathcal{C}_8$$

zu schreiben.

Die unter G festbleibenden Elemente, also die Elemente aus $\mathfrak{h}_4^{++}$ lassen sich nach (5.12) und (5.13) in der Form

(5.29) $$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_{12} & \xi_1' & x_{14} \\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & \overline{x_{14}} & \xi_2' \\ \xi_1' & x_{14} & \xi_1 & x_{12} \\ \overline{x_{14}} & \xi_2' & \overline{x_{12}} & \xi_2 \end{pmatrix} \qquad \xi_1,\xi_2,\xi_1',\xi_2'\in K,\quad x_{12},x_{14}\in\mathcal{C}_8$$

darstellen. Abkürzend genügt es zur Charakterisierung der unter G festbleibenden Elemente

$$(5.30)\qquad X = (\xi_1,\xi_2;\xi_1',\xi_2';x_{12},x_{14}),\quad \xi_i,\xi_i'\in K,\ x_{12},x_{14}\in\mathcal{C}_8$$

zu schreiben. Es gilt

Satz 5.7: $\mathfrak{H}_4^{++}(\mathcal{C}_8)$ ist eine Jordan-Algebra.

Beweis: Es genügt wegen Satz 5.6 zu zeigen, dass $\mathfrak{H}_4^{++}$ potenzassoziativ ist, da Λ nach Satz 5.4 auf $\mathfrak{H}_4^{++}$ assoziativ und nichtausgeartet ist. (5.30) zeigt, dass die Elemente aus $\mathfrak{H}_4^{++}$, bis auf den Übergang zur konjugierten, nur zwei Cayley-Grössen aufweisen. In den Potenzen eines Elementes $X\in\mathfrak{H}_4^{++}$ treten also nur Summen von Produkten von zwei Cayley-Grössen auf. Der Satz von E.Artin über nichtassoziative Alternativalgebren besagt, dass jede von zwei Cayley-Grössen erzeugte Algebra eine assoziative Teilalgebra ist. Es kommt also in den Produkten auf Klammern nicht an. Da der Satz für Matrizen mit Elementen aus einer assoziativen Algebra gilt, ist damit alles bewiesen.

Es sei n=6.
Wir zeigen, dass die Algebra $\mathfrak{H}_6^{++}(\mathcal{C}_8)$ der unter $G = \{Id,\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ festbleibenden Elemente nicht potenzassoziativ ist.
$\mathcal{C}_8$ sei die Standard-Cayley-Algebra über K, charakterisiert durch $x_1^2=x_2^2=x_4^2=\xi_1=\xi_2=\xi_4=-1$. Die Elemente

$1, b_2=x_1, b_3=x_2, b_4=-x_2x_1=x_1x_2, b_5=x_4, b_6=-x_4x_1=x_1x_4, b_7=-x_4x_2=x_2x_4,$

$b_8=x_4x_2x_1=x_1x_2x_4$

bilden eine Basis der Standard-Cayley-Algebra über K.
Auf Grund der Sätze von §§2,3 ergibt sich für die b_i die folgende Multiplikationstabelle:

	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_2	-1	b_4	$-b_3$	b_6	$-b_5$	$-b_8$	b_7
b_3	$-b_4$	-1	b_2	b_7	b_8	$-b_5$	$-b_6$
b_4	b_3	$-b_2$	-1	b_8	$-b_7$	b_6	$-b_5$
b_5	$-b_6$	$-b_7$	$-b_8$	-1	b_2	b_3	b_4
b_6	b_5	$-b_8$	b_7	$-b_2$	-1	$-b_4$	b_3
b_7	b_8	b_5	$-b_6$	$-b_3$	b_4	-1	$-b_2$
b_8	$-b_7$	b_6	b_5	$-b_4$	$-b_3$	b_2	-1

Wegen (5.12),(5.13) haben die Elemente von $\mathfrak{H}_6^{++}(\mathcal{C}_8)$ die Form

$$(5.31)\qquad X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_{12} & x_{13} & \xi_1' & x_{15} & x_{16} \\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23} & \overline{x_{15}} & \xi_2' & x_{26} \\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3 & \overline{x_{16}} & \overline{x_{26}} & \xi_3' \\ \xi_1' & x_{15} & x_{16} & \xi_1 & x_{12} & x_{13} \\ \overline{x_{15}} & \xi_2' & x_{26} & \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23} \\ \overline{x_{16}} & \overline{x_{26}} & \xi_3' & \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3 \end{pmatrix}\qquad \xi_i,\xi_i'\in K,\ x_{ij}\in\mathcal{C}_8$$

Abkürzend genügt es zur Charakterisierung der unter G festbleibenden Elemente

$$(5.32)\qquad X = (\xi_1,\xi_2,\xi_3;\xi_1',\xi_2',\xi_3';x_{12},x_{13},x_{15},x_{16},x_{23},x_{26}),\quad \xi_i,\xi_i'\in K,\ x_{ij}\in\mathcal{C}_8$$

zu schreiben.
Wir wählen das Element
$A = (0,0,0;0,0,0;b_3 b_6 b_4,0,0,b_7)$ aus $\mathfrak{H}_6^{++}$.
Für die Matrix $D = (d_{ij}) = A^2\circ A^2$ ergibt sich das Element d_{12} zu:

$$d_{12} = (4\lambda(b_3\overline{b_4})b_6\overline{b_7}+(b_4b_7)(\overline{b_6}b_3)+(b_3b_7)(\overline{b_6}b_4)).$$

Für die Matrix $D^* = (d^*_{ij}) = (A^2\circ A)\circ A$ ergibt sich das Element d^*_{12} zu:

$$\begin{aligned} d_{12} = \tfrac{1}{4}(&((b_4b_7)\overline{b_6})b_3+((b_6\overline{b_7})\overline{b_4})b_3+(b_6(\overline{b_7}\overline{b_4}))b_3+(b_4(b_7\overline{b_6}))b_3+ \\ &+((b_6\overline{b_7})\overline{b_3})b_4+((b_3b_7)\overline{b_6})b_4+(b_3(b_7\overline{b_6}))b_4+(b_6(\overline{b_7}\overline{b_3}))b_4+ \\ &+(b_3(\overline{b_4}b_6))\overline{b_7}+(b_4(\overline{b_3}b_6))\overline{b_7}+b_6((\overline{b_7}\overline{b_3})b_4)+b_6((\overline{b_7}\overline{b_4})b_3)+ \\ &+4\lambda(b_3\overline{b_4})b_6\overline{b_7}+4\lambda(\overline{b_4}b_6\overline{b_7})b_3+4\lambda(\overline{b_3}b_6\overline{b_7})b_4\ ). \end{aligned}$$

Es gilt $\overline{b_i}=-b_i$ für $i=2,3,\ldots,8$, daher $2\lambda(b_i) = 0$ für $i=2,3,\ldots,8$.
Daher erhält man
$d_{12} = 2b_3$, aber $d^*_{12} = b_3$.
Es gilt somit $A^2\circ A^2 \neq (A^2\circ A)\circ A$, $\mathfrak{H}_6^{++}(\mathcal{C}_8)$ ist nicht potenzassoziativ, daher auch nicht Jordan-Algebra.

Insgesamt müssen also von unserem Standpunkt aus die Fälle n=3 und n=4 besonders interessieren, denen wir uns in den folgenden Paragraphen zuwenden.

§6 Der Fall n=2

Für die uns besonders interessierenden Fälle n=3 und n=4 benötigen wir ein paar Eigenschaften der Algebren $\mathcal{C}_{8,2}(\circ)$ und $\mathfrak{H}_2^+(\mathcal{C}_8)$.

Die Elemente von $\mathcal{C}_{8,2}$ sind die 2x2-Matrizen mit Elementen in $\mathcal{C}_8$. Wegen (5.24) haben die Elemente von $\mathfrak{H}_2^+(\mathcal{C}_8)$ die Form

$$X = \begin{pmatrix}\xi_1 & x\\ \bar{x} & \xi_2\end{pmatrix}, \quad \xi_i \in K, \ x \in \mathcal{C}_8.$$

Die Algebra $\mathfrak{H}_2^+(\mathcal{C}_8)$ ist offenbar potenzassoziativ und, da $\Lambda: X \longrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}X+\mathrm{Spur}\bar{X}) = \mathrm{Spur}X$ eine auf $\mathfrak{H}_2^+$ nichtausgeartete, symmetrische und assoziative Linearform ist, eine zentral-einfache Jordan-Algebra der Dimension 10 über K.

1. $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ sei ein Element von $\mathcal{C}_{8,2}$. Speziell sei $a_{11} = \alpha \in K$.

Wir definieren

(6.1) $\quad \det A = \det\begin{pmatrix}\alpha & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \alpha a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Es sei B ein Element aus $\mathcal{C}_{8,2}$ mit der Eigenschaft, dass eines der b_{ij}, etwa $b_{km}=\beta$ in K liegt. Durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen lässt sich erreichen, dass dieses Element an der Positiom (1,1) steht.

Wir definieren

(6.2) $\quad \det_\beta B = \det\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = (-1)^\nu \det\begin{pmatrix}b_{km} & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix} = (-1)^\nu \det\begin{pmatrix}\beta & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}$,

ν sei die Anzahl der Zeilen- und Spaltenvertauschungen, die notwendig sind, um $b_{km}=\beta$ an die Position (1,1) zu bringen.
Somit haben wir für diese speziellen Elemente von $\mathcal{C}_{8,2}$ eindeutig die Form $\det_\beta$ definiert.
$\beta_1,\dots,\beta_k$ seien die in K liegenden Elemente eines Elementes $B \in \mathcal{C}_{8,2}$.
Wir definieren

(6.3) $\quad \det B = \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} \det_{\beta_i} B\right)$.

Mit (6.3) ist für alle Matrizen aus $\mathcal{C}_{8,2}$, die mindestens ein Element aus K enthalten, eindeutig eine Form det erklärt.
Insbesondere gilt für $A \in \mathfrak{H}_2^+$, $\quad A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & a\\ \bar{a} & \alpha_2\end{pmatrix}$

(6.4) $\quad \det A = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & a\\ \bar{a} & \alpha_2\end{pmatrix} = \alpha_1\alpha_2 - \mu(a)$.

Es gilt: $A \in \mathfrak{H}_2^+$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$.
A invertierbar bedeute, es existiert ein Element $B \in K[A]$ mit $A \circ B = E$.
Es sei $A \in \mathfrak{H}_2^+$ und $\det A \neq 0$.
Es folgt

$$B = (\det A)^{-1}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix} = (\det A)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_2 & -a\\ -\bar{a} & \alpha_1\end{pmatrix} = (\det A)^{-1}(\Lambda(A)E-A).$$

Es sei A invertierbar. Da K[A] assoziativ ist, ist B eindeutig bestimmt, $B = A^{-1}$.
Es gilt
$\det A . A^{-1} = A'$, also, da $A' = \Lambda(A)E-A \neq 0$, $\det A \neq 0$.

Wir berechnen $\det(\tau E-A)$.
Es ergibt sich
$\chi_A(\tau) = \tau^2-(\alpha_1+\alpha_2)\tau+(\alpha_1\alpha_2-\mu(a)) = \tau^2-\Lambda(A)\tau+\det A$.
Das allgemeine Element X von $\mathfrak{H}_2^+$ genügt daher der Gleichung

(6.5) $\quad X^2-\Lambda(X)X+\det X . E = 0$.

Die Algebra $\mathfrak{H}_2^+$ ist somit eine spurenverträgliche Algebra vom Grad 2 über K.

Aus (6.5) erhalten wir mit $X=(\xi_1,\xi_2;x)$, $Y=(\eta_1,\eta_2;y)$ durch Linearisieren sofort

(6.6) $\quad 2X\circ Y-\Lambda(X)Y-\Lambda(Y)X+M(X,Y)E = 0$

mit $M(X,Y) = (\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1-2\lambda(x\bar{y}))$,
also

(6.7) $\quad M(X,X) = 2\det X, \quad M(X,E) = M(E,X) = \Lambda(X)$.

M ist eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform.
Denn:
M ist trivialerweise eine symmetrische Bilinearform.
$M(X,Y) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{H}_2^+$ ist gleichwertig mit
$\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1 = 2\lambda(x\bar{y})$ für alle $\eta_1,\eta_2 \in K$, $y \in \mathcal{C}_8$.
Daher auch $\xi_1+\xi_2 = 2\lambda(x\bar{y})$, $\xi_1-\xi_2 = 2\lambda(x\bar{y})$, also $\xi_1=\xi_2=0$.
Da λ als nichtausgeartete Linearform auf $\mathcal{C}_8$ vorausgesetzt ist, folgt x=0, also $X=(\xi_1,\xi_2;x)=0$.

Die Algebra $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$ ist daher eine der in [6] behandelten Jordan-Algebren vom Typ $[X;\mu,e]$ mit nichtausgeartetem μ.
Wir können die dort hergeleiteten Ergebnisse auf $\mathfrak{h}_2^+$ anwenden.

Wir interessieren uns für die Idempotente von $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$, also für die Elemente $A = \begin{pmatrix}\alpha_1 & a \\ \bar{a} & \alpha_2\end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2;a)$

mit

$$A^2 = \begin{pmatrix} (\alpha_1^2+\mu(a)) & (\alpha_1+\alpha_2)a \\ (\alpha_1+\alpha_2)\bar{a} & (\alpha_2^2+\mu(a)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & a \\ \bar{a} & \alpha_2\end{pmatrix} = A .$$

Lemma 5.1 aus [6,VI] liefert:

$A \neq E$ ist genau dann Idempotent, wenn gilt $\Lambda(A) = 1$, $\det A = 0$, also genau dann, wenn A von der Form

$\begin{pmatrix}\alpha & a \\ \bar{a} & 1-\alpha\end{pmatrix} = (\alpha,1-\alpha;a)$ ist mit $\det A = 0$.

Zwei Idempotente $A,B \in \mathfrak{h}_2^+$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt:

$(\alpha\beta+\lambda(a\bar{b}),(1-\alpha)(1-\beta)+\lambda(a\bar{b});\frac{1}{2}(a+b)) = (0,0;0)$,

also $a=-b$ und $\alpha\beta=(1-\alpha)(1-\beta)=\mu(a)$, also
$a=-b$ und $\alpha=1-\beta$.

Wir haben:

Zwei Idempotente $A,B \in \mathfrak{h}_2^+$ sind genau dann orthogonal zueinander, wenn $a=-b$ und $\alpha=1-\beta$ gilt.

Weiter gilt offenbar:

In $\mathfrak{h}_2^+$ bilden genau die Idempotentensysteme der Form $(\alpha,1-\alpha;a)$, $(1-\alpha,\alpha;-a)$ die vollständigen Orthogonalsysteme.
Da die Eigenschaften (e) aus §5 Folgerungen des Jordan-Gesetzes $x^2(xy) = x(x^2y)$ sind, lässt sich $\mathfrak{h}_2^+$ diesen Idempotentensystemen nach zerlegen.

Wir fragen nach der Vertauschbarkeit von Elementen in $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$.
Zwei Elemente A,B heissen vertauschbar, wenn gilt
$L(A)\cdot L(B) = L(B)\cdot L(A)$.
Das ist gleichwertig mit
$A\cdot(B\cdot X) = B\cdot(A\cdot X)$ für alle $X \in \mathfrak{h}_2^+$.
Da Λ nichtausgeartet ist auf $\mathfrak{h}_2^+$, liefert Lemma 5.6 aus [6,VI]:

$A,B \in \mathfrak{h}_2^+$ sind genau dann vertauschbar, wenn A,B und E linear abhängig sind, wenn es also Elemente ϱ,σ,τ gibt in K, nicht alle $=0$, derart dass
$0 = \varrho B+\sigma A+\tau E$
gilt.
Wir können $\tau=-1$ annehmen, denn $\tau=0$ bedeutet, dass B K-Vielfaches von A ist. Also sind A,B, $B\neq\alpha A$ genau dann vertauschbar, wenn gilt

(6.8) $\sigma\alpha_1+\varrho\beta_1 = 1, \quad \sigma\alpha_2+\varrho\beta_2 = 1, \quad \sigma a+\varrho b = 0$

1. Wir betrachten den Fall $\varrho=0$.
Dann ist $\sigma\neq 0$, also $a=0$ und $\sigma\alpha_1=\sigma\alpha_2=1$, daher $\alpha_1=\alpha_2=\sigma^{-1}$.
$A = \alpha E$, $\alpha\in K$, ist also mit jedem $B=(\beta_1,\beta_2;b)$ vertauschbar.

2. Wir können also $\varrho,\sigma\neq 0$ annehmen.
Wir haben

(6.9) $\sigma(\alpha_1-\alpha_2) = -\varrho(\beta_1-\beta_2), \quad -\sigma a = \varrho b$.

α. $\alpha_1=\alpha_2$. Daher $\beta_1=\beta_2$.
Also
$A=(\alpha,\alpha;a)$ ist mit $B=(\beta_1,\beta_2;b)$ vertauschbar, wenn $\beta_1=\beta_2$ und $b=\varrho' a$, $\varrho'\in K$, gilt. Das ist aber auch hinreichend, denn in diesem Fall sind A,B und E offenbar linear abhängig.
β. Wir können also $\alpha_1\neq\alpha_2$ annehmen.
Dann gilt
$-\sigma\varrho^{-1} = (\beta_1-\beta_2)(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}$, also $b = (\beta_1-\beta_2)(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}a$.
Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, denn in diesem Fall sind A,B und E linear abhängig. Denn es ergibt sich wegen $\varrho\neq 0$
$\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \neq 0$ und daher

$$E = \sigma A+\varrho B \text{ mit } \sigma = (\beta_2-\beta_1)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^{-1} ,$$
$$\varrho = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^{-1} .$$

Wir fassen zusammen:

Satz 6.1: Zwei Elemente A und B aus $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$ sind genau dann vertauschbar, wenn gilt
(i) $A = \alpha E$ und $B = (\beta_1,\beta_2;b)$
(ii) $A = (\alpha,\alpha;a)$ und $B = (\beta,\beta;\varrho' a)$, $\varrho'\in K$
(iii) $A = (\alpha_1,\alpha_2;a)$ und $B = (\beta_1,\beta_2;\varrho' a)$ mit $\varrho'=(\beta_1-\beta_2)(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}$, also $\alpha_1\neq\alpha_2$.

Korollar 6.1: Zwei Idempotente A und B aus $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$ sind genau dann vertauschbar, wenn gilt

(i) $A = (\alpha, 1-\alpha; a)$ und $B = (\beta, 1-\beta; \varrho' a)$ mit $\varrho' = (2\beta-1)(2\alpha-1)^{-1}$, falls $\alpha \neq \frac{1}{2}$.

(ii) $A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; a)$ und $B = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \varrho' a)$ mit beliebigen ϱ' aus K.

Korollar 6.2: Zwei orthogonale Idempotente A, B=E-A von $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$ sind stets vertauschbar.

Trivialerweise gilt: A ist mit A vertauschbar.

Trivialerweise gilt: Ist A mit B vertauschbar, so ist B mit A vertauschbar.

Satz 6.2: A,B,C seien keine K-Vielfachen von E, $A,B,C \in \mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$. Gilt A,B vertauschbar, B,C vertauschbar, so auch A,C vertauschbar.

Beweis:

A,B vertauschbar ist gleichwertig mit A,B,E linear abhängig.

B,C vertauschbar ist gleichwertig mit B,C,E linear abhängig.

Dann sind aber auch B,C,E linear abhängig.

Wir definieren

$$\mathfrak{M}_A = \{B;\ B \text{ und } A \text{ sind vertauschbar},\ A \neq \varkappa E,\ \varkappa \in K\} .$$

Die Menge $\mathfrak{M}_A$ hat die folgenden Eigenschaften:

1) B_j, B_k sind vertauschbar für $B_j, B_k \in \mathfrak{M}_A$.

2) $A \in \mathfrak{M}_A$.

3) $B_j, B_k \in \mathfrak{M}_A$, dann $B_j \circ B_k \in \mathfrak{M}_A$.

4) $B_j, B_k \in \mathfrak{M}_A$, dann $B_j + B_k$, $\varkappa B_j \in \mathfrak{M}_A$, $\varkappa \in K$.

Beweis: 1) und 2) sind trivial.

3) Wir können annehmen, dass $B_j, B_k \neq \varkappa E$, $\varkappa \in K$.

A, B_j vertauschbar gibt E, A, B_j linear abhängig, also $0 = \varrho_j B_j + \sigma_j A + \tau_j E$ mit $\varrho_j, \sigma_j \neq 0$

A, B_k vertauschbar gibt E, A, B_k linear abhängig, also $0 = \varrho_k B_k + \sigma_k A + \tau_k E$ mit $\varrho_k, \sigma_k \neq 0$

Daher:

$$\varrho_j \varrho_k B_j \circ B_k = (\sigma_j A + \tau_j E) \circ (\sigma_k A + \tau_k E) = \sigma_j \sigma_k A^2 + (\sigma_j \tau_k + \sigma_k \tau_j) A + \tau_j \tau_k E$$

Da aber $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$ spurenverträglich vom Grad 2 ist, gilt nach (6.5) $A^2 = \Lambda(A)A - \det A . E$, also

$$\varrho_j \varrho_k B_j \circ B_k = (\sigma_j \sigma_k . \Lambda(A) + \sigma_j \tau_k + \sigma_k \tau_j) A + (\tau_j \tau_k - \sigma_j \sigma_k . \det A) E .$$

Für $B_j \circ B_k = 0$ ist nichts zu beweisen, wir können also $B_j \circ B_k \neq 0$ annehmen und haben:

$B_j \circ B_k$, A und E sind linear abhängig, also sind $B_j \circ B_k$ und A vertauschbar.

4) $B_j \circ (A \circ X) = A \circ (B_j \circ X)$, $B_k \circ (A \circ X) = A \circ (B_k \circ X)$ für alle $X \in \mathfrak{h}_2^+$.

Es folgt

$$(B_j + B_k) \circ (A \circ X) = B_j \circ (A \circ X) + B_k \circ (A \circ X) = A \circ (B_j \circ X) + A \circ (B_k \circ X) = A \circ ((B_j + B_k) \circ X)$$

und

$A \circ (B_j \circ X) = B_j \circ (A \circ X)$, daher

$$A \circ ((\varkappa B_j) \circ X) = \varkappa (A \circ (B_j \circ X)) = \varkappa (B_j \circ (A \circ X)) = (\varkappa B_j) \circ (A \circ X) .$$

Wir haben:

Satz 6.3: $\mathfrak{M}_A$ bildet eine Teilalgebra von $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$.

Es gilt weiter

Satz 6.4: $\mathfrak{M}_A$ bildet eine assoziative Teilalgebra von $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$.

Beweis: $B_i, B_j, B_k \in \mathfrak{M}_A$, dann

$B_i \circ (B_j \circ B_k) = B_i \circ (B_k \circ B_j) = B_k \circ (B_i \circ B_j) = (B_i \circ B_j) \circ B_k$, da B_i und B_k vertauschbar sind.

Es gilt: $\mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_B = \varkappa E$, $\varkappa \in K$ oder $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_B$.

Denn:

Es sei $D \in \mathfrak{M}_A \cap \mathfrak{M}_B$, $D \neq \varkappa E$. Also sind A,D vertauschbar, D,B vertauschbar, daher nach Satz 6.2 A,B vertauschbar, also $A \in \mathfrak{M}_B$, $B \in \mathfrak{M}_A$.

Es sei $X \in \mathfrak{M}_A$, $X \neq \varkappa E$, somit X,A vertauschbar, A,B vertauschbar, also X,B vertauschbar, daher $\mathfrak{M}_A \subset \mathfrak{M}_B$. Ebenso $\mathfrak{M}_B \subset \mathfrak{M}_A$.

Im allgemeinen gilt aber nicht:

$X \in \mathfrak{M}_A$, $Y \in \mathfrak{M}_B$ folgt $X + Y \in \mathfrak{M}_{A+B}$, $X \circ Y \in \mathfrak{M}_{A \circ B}$.

Insgesamt haben wir:

$$\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8) = \sum_{\substack{A \in \mathfrak{h}_2^+ \\ A \neq \varkappa E}} \mathfrak{M}_A .$$

§7 Der Fall n=3

1. Es seien $A,B\in\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$, also wegen (5.26)

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;a_{12},a_{13},a_{23})\ ,\quad B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3;b_{12},b_{13},b_{23})\ .$

Es gilt $A\cdot B=D=(\delta_1,\delta_2,\delta_3;d_{12},d_{13},d_{23})$ mit

$$(7.1)\qquad \delta_i=\alpha_i\beta_i+\lambda(a_{ii+1}\overline{b_{ii+1}})+\lambda(a_{ii+2}\overline{b_{ii+2}})\ ,$$

$i=1,2,3$ zyklisch, λ die Linearform auf $\mathcal{C}_8$.

$$(7.2)\qquad d_{ij}=\tfrac{1}{2}((\beta_i+\beta_j)a_{ij}+(\alpha_i+\alpha_j)b_{ij}+(a_{ik}\overline{b_{jk}}+b_{ik}\overline{a_{jk}}))\ ,$$

$i,j,k=1,2,3;\ a_{ij}=\overline{a_{ji}}$; k sei stets der im Paar (i,j) fehlende Index von 1,2,3.

Es gilt der folgende

<u>Satz 7.1: Die Algebra $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ ist eine exceptionelle, zentral-einfache Jordan-Algebra.</u>

Wir haben gesehen, dass $\mathfrak{h}_3^+$ eine Jordan-Algebra ist und bewiesen, dass $\mathfrak{h}_3^+$ zentral-einfach ist. Wir geben ein Beweisschema: Um zu zeigen, dass $\mathfrak{h}_3^+$ nicht isomorph zu einer Teilalgebra von $\mathcal{E}^+$ ist, $\mathcal{E}$ eine assoziative Algebra, nimmt man an, $\mathfrak{h}_3^+$ sei speziell und σ ein Isomorphismus von $\mathfrak{h}_3^+$ in $\mathcal{E}^+$. Man nimmt an, $\mathcal{F}_3=\mathcal{E}$, mit assoziativem $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ besitzt eine Involution und das Bild $\sigma(\mathfrak{h}_3^+)$ ist die Menge der selbstadjungierten Elemente bezüglich der kanonischen Involution in $\mathcal{F}_3$. Dann zeigt man, dass σ^{-1} ein Isomorphismus von $\sigma(\mathfrak{h}_3^+)$ auf $\mathfrak{h}_3^+$ ist, der sich fortsetzen lässt zu einem Homomorphismus von $\mathcal{F}_3$ auf $\mathcal{C}_{8,3}$. Daher ist $\mathcal{C}_8$ das homomorphe Bild einer assoziativen Algebra. Widerspruch. (vgl. [12])

2. Wir haben in §5 bewiesen, dass $\Lambda: A\longrightarrow\frac{1}{2}(\mathrm{Spur}A+\mathrm{Spur}\bar{A})$ auf $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ eine symmetrische, assoziative und nichtausgeartete Linearform ist. Wir betrachten die zur Linearform Λ gehörende quadratische Form M, gegeben durch $\Lambda(X\cdot Y)=M(X+Y)-M(X)-M(Y)$, also

$$(7.3)\qquad M(X)=\tfrac{1}{2}\Lambda(X^2)$$

Mit (7.1) und (7.2) erhalten wir

$$(7.4)\qquad M(X)=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+1})$$

<u>Satz 7.2: Die Form $M:\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)\longrightarrow K$ besitzt die Eigenschaft (4.3) aus §4, also</u>

<u>$(7.5)\quad M(X^2)=M^2(X)$ für alle $X\in\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ mit $\Lambda(X)=0$.</u>

Beweis: $\Lambda(X)=0$ ist gleichwertig mit $\sum_{i=1}^{3}\xi_i=0$. Daher gilt

$0=(\sum_{i=1}^{3}\xi_i)^2=\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2+2\sum_{i=1}^{3}\xi_i\xi_{i+1}$, daher

$\frac{1}{2}(\sum\xi_i^2)^2=2(\sum\xi_i\xi_{i+1})^2=2(\sum\xi_i^2\xi_{i+1}^2+2\xi_i\xi_{i+1}\sum\xi_i)=2\sum\xi_i^2\xi_{i+1}^2.$

Weiter gilt

$$0=(\sum\xi_i)^4=(\sum\xi_i^2+2\sum\xi_i\xi_{i+1})^2=$$
$$=\sum\xi_i^4+2\sum\xi_i^2\xi_{i+1}^2+4(\sum\xi_i)^2\sum\xi_i\xi_{i+1}+4(\sum\xi_i\xi_{i+1})^2,$$

mit dem obigen Ergebnis folgt daraus

$\sum\xi_i^4=2\sum\xi_i^2\xi_{i+1}^2$ und daher

$$(7.6)\qquad \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2)^2=\sum_{i=1}^{3}\xi_i^4\quad\text{für}\quad\sum_{i=1}^{3}\xi_i=0.$$

Es gilt nach Definition $M(X^2)=M^2(X)\Longleftrightarrow\Lambda((X^2)^2)=\frac{1}{2}\Lambda^2(X^2)$.

Wir berechnen zunächst $\frac{1}{2}\Lambda^2(X^2)$.

Mit (7.1) und (7.2) gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Lambda^2(X^2)&=\tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{3}(\xi_i^2+2\mu(x_{ii+1})))^2=\tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{3}2\mu(x_{ii+1}))^2=\\&=\tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2)^2+2\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+1})+2\sum_{i=1}^{3}\mu^2(x_{ii+1})+2\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+1})\mu(x_{ii+2})+\\&\qquad+2\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+2})\mu(x_{ii+1})\ .\end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}\Lambda((X^2)^2)&=\sum_{i=1}^{3}((\xi_i^2+\mu(x_{ii+1})+\mu(x_{ii+2}))^2+\lambda(((\xi_i+\xi_{i+1})x_{ii+1}+x_{ii+2}\overline{x_{i+1i+2}})((\xi_i+\xi_{i+1})\overline{x_{ii+1}}+x_{i+1i+2}\overline{x_{ii+2}}))+\\&\qquad+\lambda(((\xi_i+\xi_{i+2})x_{ii+2}+x_{ii+1}\overline{x_{i+1i+2}})((\xi_i+\xi_{i+2})\overline{x_{ii+2}}+\overline{x_{i+1i+2}}x_{ii+1})))=\\&=\sum_{i=1}^{3}((\xi_i^2+\mu(x_{ii+1})+\mu(x_{ii+2}))^2+2\lambda(((\xi_i+\xi_{i+1})x_{ii+1}+x_{ii+2}\overline{x_{i+1i+2}})((\xi_i+\xi_{i+1})\overline{x_{ii+1}}+x_{i+1i+2}\overline{x_{ii+2}}))=\\&=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i^4+2\xi_i^2(\mu(x_{ii+1})+\mu(x_{ii+2}))+(\mu(x_{ii+1})+\mu(x_{ii+2}))^2+2(\xi_i+\xi_{i+1})^2\mu(x_{ii+1})+\\&\qquad+4(\xi_i+\xi_{i+1})\lambda(x_{ii+1}x_{i+1i+2}\overline{x_{ii+2}})+2\mu(x_{ii+2})\mu(x_{i+1i+2}))=\\&=\sum_{i=1}^{3}(\xi_i^4+2(\xi_i^2+\xi_{i+1}^2+(\xi_i+\xi_{i+1})^2)\mu(x_{ii+1})+(\mu(x_{ii+1})+\mu(x_{ii+2}))^2+2\mu(x_{ii+2})\mu(x_{i+1i+2}))=\\&=\sum_{i=1}^{3}\xi_i^4+2\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+1})+\sum_{i=1}^{3}((\mu(x_{ii+1})+\mu(x_{ii+2}))^2+2\mu(x_{ii+2})\mu(x_{i+1i+2}))=\\&=\sum_{i=1}^{3}\xi_i^4+2\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+1})+2\sum_{i=1}^{3}\mu^2(x_{ii+1})+2\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+1})\mu(x_{ii+2})+2\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{ii+2})\mu(x_{i+1i+2})\end{aligned}$$

und wegen (7.6) folgt die Behauptung.

3. Mit Hilfe der auf $\mathcal{C}_{8,2}$ für gewisse Elemente erklärten Form det definieren wir auf $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ eine Determinante durch Entwickeln nach der k-ten Zeile oder Spalte:

$$(7.7)\qquad \det X=\det(\xi_1,\xi_2,\xi_3;x_{12},x_{13},x_{23})=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_{ik}X_{ik}+X_{ki}x_{ki})\ ,$$

für alle $X \in \mathfrak{H}_3^+(\mathcal{C}_8)$, worin die X_{ik} die algebraischen Komplemente von x_{ik} an der Stelle (i,k) sind, also die mit einem Vorzeichen versehenen Determinanten derjenigen Untermatrizen von X, die durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte aus X hervorgehen. Sie sind alle von der speziellen Form, für die durch (6.2) eine Determinante erklärt ist.

Wir zeigen: Die Form det ist eindeutig bestimmt.

Wir berechnen detX für k=1: $\det X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_{i1}X_{i1}+X_{1i}x_{1i})$.

Es gilt

$$X_{11}=\det\begin{pmatrix}\xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix} = (\xi_2\xi_3-\mu(x_{23})),\qquad X_{22}=\det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{13}\\ \overline{x_{13}} & \xi_3\end{pmatrix} = (\xi_1\xi_3-\mu(x_{13}))$$

$$X_{33}=\det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12}\\ \overline{x_{12}} & \xi_2\end{pmatrix} = (\xi_1\xi_2-\mu(x_{12})),$$

$$X_{12}=(-1)^3\det\begin{pmatrix}\overline{x_{12}} & x_{23}\\ \overline{x_{13}} & \xi_3\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\xi_3 & \overline{x_{13}}\\ x_{23} & \overline{x_{12}}\end{pmatrix} = -\xi_3\overline{x_{12}}+x_{23}\overline{x_{13}}\ ,$$

$$X_{21}=(-1)^3\det\begin{pmatrix}x_{12} & x_{13}\\ \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\xi_3 & \overline{x_{23}}\\ x_{13} & x_{12}\end{pmatrix} = -\xi_3x_{12}+x_{13}\overline{x_{23}}\ ,$$

$$X_{13}=(-1)^4\det\begin{pmatrix}\overline{x_{12}} & \xi_2\\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\xi_2 & \overline{x_{12}}\\ \overline{x_{23}} & \overline{x_{13}}\end{pmatrix} = -\xi_2\overline{x_{13}}+\overline{x_{23}}\,\overline{x_{12}}\ ,$$

$$X_{31}=(-1)^4\det\begin{pmatrix}x_{12} & x_{13}\\ \xi_2 & x_{23}\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\xi_2 & x_{23}\\ x_{12} & x_{13}\end{pmatrix} = -\xi_2x_{13}+x_{12}x_{23}\ ,$$

$$X_{23}=(-1)^5\det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12}\\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}}\end{pmatrix} = -\xi_1\overline{x_{23}}+\overline{x_{13}}x_{12}\ ,$$

$$X_{32}=(-1)^5\det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{13}\\ \overline{x_{12}} & x_{23}\end{pmatrix} = -\xi_1x_{23}+\overline{x_{12}}x_{13}\ ,$$

daher

$$\det X = \tfrac{1}{2}(\xi_1(\xi_2\xi_3-\mu(x_{23}))+(\xi_2\xi_3-\mu(x_{23}))\xi_1+\overline{x_{12}}(-\xi_3x_{12}+x_{13}\overline{x_{23}})+(-\xi_3\overline{x_{12}}+x_{23}\overline{x_{13}})x_{12}+$$
$$+\overline{x_{13}}(-\xi_2x_{13}+x_{12}x_{23})+(-\xi_2\overline{x_{13}}+\overline{x_{23}}\,\overline{x_{12}})x_{13}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(2\xi_1\xi_2\xi_3-2\xi_1\mu(x_{23})-2\xi_2\mu(x_{13})+2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}})-2\xi_3\mu(x_{12})+2\lambda(\overline{x_{13}}x_{12}x_{23})),$$ also

(7.8) $$\det X = (\xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1\mu(x_{23})-\xi_2\mu(x_{13})-\xi_3\mu(x_{12})+2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}})),$$

denn $2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}})=2\lambda(x_{23}\overline{x_{13}}x_{12})=2\lambda(\overline{x_{13}}x_{12}x_{23})$.

Wir berechnen detX für k=2:

$$\det X = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3}x_{i2}X_{i2}+X_{2i}x_{2i}\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_{12}(-\xi_3\overline{x_{12}}+x_{23}\overline{x_{13}})+(-\xi_3x_{12}+x_{13}\overline{x_{23}})\overline{x_{12}}+\xi_2(\xi_1\xi_3-\mu(x_{13}))+(\xi_1\xi_3-\mu(x_{13}))\xi_2+$$
$$+\overline{x_{23}}(-\xi_1x_{23}+\overline{x_{12}}x_{13})+(-\xi_1\overline{x_{23}}+\overline{x_{13}}x_{12})x_{23}) =$$
$$= \xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1\mu(x_{23})-\xi_2\mu(x_{13})-\xi_3\mu(x_{12})+\lambda(x_{12}x_{23}\overline{x_{13}})+\lambda(\overline{x_{23}}\,\overline{x_{12}}x_{13}) =$$
$$= \xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1\mu(x_{23})-\xi_2\mu(x_{13})-\xi_3\mu(x_{12})+2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}})\ .$$

Wir berechnen detX für k=3:

$$\det X = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3}x_{i3}X_{i3}+X_{3i}x_{3i}\Big) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(x_{13}(-\xi_2\overline{x_{13}}+\overline{x_{23}}\,\overline{x_{12}})+(-\xi_2x_{13}+x_{12}x_{23})\overline{x_{13}}+x_{23}(-\xi_1\overline{x_{23}}+\overline{x_{13}}x_{12})+(-\xi_1x_{23}+\overline{x_{12}}x_{13})\overline{x_{23}}+$$
$$+\xi_3(\xi_1\xi_2-\mu(x_{12}))+(\xi_1\xi_2-\mu(x_{12}))\xi_3) =$$
$$= \xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1\mu(x_{23})-\xi_2\mu(x_{13})-\xi_3\mu(x_{12})+\lambda(x_{13}\overline{x_{23}}\,\overline{x_{12}})+\lambda(x_{23}\overline{x_{13}}x_{12}) =$$
$$= \xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1\mu(x_{23})-\xi_2\mu(x_{13})-\xi_3\mu(x_{12})+2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}})\ .$$

Ebenso ergibt sich bei Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det X = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3}x_{ik}X_{ik}+X_{ki}x_{ki}\Big) =$$
$$= \xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1\mu(x_{23})-\xi_2\mu(x_{13})-\xi_3\mu(x_{23})+2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}})\ .$$

Daher erhalten wir

$$\det(\tau E-X) = ((\tau-\xi_1)(\tau-\xi_2)(\tau-\xi_3)-(\tau-\xi_1)\mu(x_{23})-(\tau-\xi_2)\mu(x_{13})-(\tau-\xi_3)\mu(x_{12})-$$
$$-2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}}) =$$
$$= \tau^3-(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\tau^2+(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3-\mu(x_{12})-\mu(x_{13})-\mu(x_{23}))\tau-$$
$$-(\xi_1\xi_2\xi_3-\xi_1\mu(x_{23})-\xi_2\mu(x_{13})-\xi_3\mu(x_{12})+2\lambda(\overline{x_{12}}x_{13}\overline{x_{23}})),$$

also

$$\chi_\tau(X) = \det(\tau E-X) = \tau^3-\Lambda(X)\tau^2+G_2(X)\tau-\det X\ .$$

Es gilt, wie man sofort bestätigt: $\chi_X(X) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{H}_3^+(\mathcal{C}_8)$.

Das allgemeine Element von $\mathfrak{H}_3^+(\mathcal{C}_8)$ genügt daher einer Gleichung dritten Grades

$$X^3-G_1(X)X^2+G_2(X)X-G_3(X)E = 0\ ,$$

worin $G_i(X)$ eine Form i-ten Grades auf $\mathfrak{H}_3^+(\mathcal{C}_8)$ mit Werten in K ist:

$G_1(X) = \Lambda(X)$

$G_2(X) = (\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3-\mu(x_{12})-\mu(x_{13})-\mu(x_{23}))$

$G_3(X) = \det X$,

also

(7.8) $\quad X^3-\Lambda(X)X^2+G_2(X)X-\det X.E = 0$ für alle $X\in\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$.

Da die Idempotente E_{11},E_{22},E_{33} aus dem System der 9 Matrixeinheiten E_{ij}, $i,j=1,2,3$ von $\mathfrak{h}_3^+$ ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 3 bilden, muss der Grad von $\mathfrak{h}_3^+$ grösser oder gleich drei sein (vergleiche [6,II,4]), das allgemeine Element von $\mathfrak{h}_3^+$ kann also keiner Gleichung niedrigeren Grades genügen.

Es sei $X\in\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ mit $\Lambda(X) = 0$, also $\sum_{i=1}^{3}\xi_i=0$.
Wir haben gesehen, dass dann
$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2 = -\sum_{i=1}^{3}\xi_i\xi_{i+1}$ gilt, daher

$$G_2(X) = -(\tfrac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)+\mu(x_{12})+\mu(x_{13})+\mu(x_{23})) =$$
$$= -(\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2+\sum_{i=1}^{3}\mu(x_{i\,i+1})),\quad \text{also}$$

(7.9) $\quad G_2(X) = -M(X)$ für alle $X\in\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ mit $\Lambda(X) = 0$,

also

(7.10) $\quad X^3-M(X)X-\det X.E = 0$ für alle $X\in\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ mit $\Lambda(X) = 0$.

Wir haben somit den in §4 angekündigten

<u>Satz 7.3: $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ ist eine spurenverträgliche Algebra vom Grad 3, besitzt von Null verschiedene Idempotente und genügt der Bedingung (d) (aus §4). Die Linearform Λ ist nichtausgeartet.</u>

4. Wir leiten schliesslich ein paar einfache Eigenschaften der Form $\det: \mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)\longrightarrow K$ her.
Zunächst bemerken wir, dass die Form det nicht nur für die Elemente von $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ erklärt ist, sondern, da wir die Form det über Elemente aus $\mathcal{C}_{8,2}$ definiert haben, lässt sich $\det X$ berechnen für alle X aus $\mathcal{C}_{8,3}$, deren 2x2-Matrizen mindestens ein Element aus K enthalten, unter anderen also für alle X der Form

$$\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & \xi_2 & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & \xi_3\end{pmatrix}$$

Für solche X, die nicht aus $\mathfrak{h}_3^+$ sind, ist die Form det jedoch nicht eindeutig bestimmt, sie ist nicht unabhängig davon, nach welcher Zeile oder Spalte entwickelt wird.
Es gilt für alle $X\in\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$:

(a) $\quad \det E = 1$

(b) $\quad \det\varkappa X = \varkappa^3\det X$ für $\varkappa\in K$

(c) Wir zerlegen das allgemeine Element $X = (\xi_1,\xi_2,\xi_3;x_{12},x_{13},x_{23})$ in $X = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}X_i$ mit

$X_1 = (\xi_1,0,0;0,0,x_{23})$, $X_2 = (0,\xi_2,0;0,x_{13},0)$,

$X_3 = (0,0,\xi_3;x_{12},0,0)$, $X_4 = (\xi_1,\xi_2,\xi_3;0,0,0)$,

$X_5 = (0,0,0;x_{12},x_{13},x_{23})$.

Dann gilt

(7.11) $\quad \det X = \sum_{i=1}^{5}\det X_i$.

(d)
$$\det\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & 0\\ 0 & \xi_2 & x_{23}\\ 0 & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix} = \det(\xi_1).\det\begin{pmatrix}\xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12} & 0\\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & 0\\ 0 & 0 & \xi_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12}\\ \overline{x_{12}} & \xi_2\end{pmatrix}.\det(\xi_3)$$

(e)
$$\det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12} & x_{13}\\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\xi_3 & x_{13} & x_{23}\\ \overline{x_{13}} & \xi_1 & x_{12}\\ \overline{x_{23}} & \overline{x_{12}} & \xi_2\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\xi_2 & x_{23} & x_{12}\\ \overline{x_{23}} & \xi_3 & x_{13}\\ \overline{x_{12}} & \overline{x_{13}} & \xi_3\end{pmatrix}$$

(f)

(7.12)
$$\det\begin{pmatrix}2(\xi_1+\eta_1) & x_{12}+y_{12} & x_{13}+y_{13}\\ \overline{x_{12}}+\overline{y_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{13}}+\overline{y_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix} =$$
$$=\det\begin{pmatrix}\xi_1 & x_{12} & x_{13}\\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\eta_1 & x_{12} & x_{13}\\ \overline{y_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{y_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\xi_1 & y_{12} & y_{13}\\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\eta_1 & y_{12} & y_{13}\\ \overline{y_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{y_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix}$$

Dazu: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix}\eta_1 & x_{12} & x_{13}\\ \overline{y_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{y_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\xi_1 & y_{12} & y_{13}\\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix}$$

sind keine Elemente von $\mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$. Nach der obigen Bemerkung können wir dennoch die Determinante dieser Matrizen berechnen.
Es gilt aber

$$\det\begin{pmatrix}\eta_1 & x_{12} & x_{13}\\ \overline{y_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{y_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\xi_1 & y_{12} & y_{13}\\ \overline{x_{12}} & \xi_2 & x_{23}\\ \overline{x_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3\end{pmatrix} =$$
$$= \xi_1\xi_2\xi_3+\eta_1\xi_2\xi_3-(\xi_1+\eta_1)\mu(x_{23})-2\xi_2\lambda(x_{13}\overline{y_{13}})-2\xi_3\lambda(x_{12}\overline{y_{12}})+2\lambda(\overline{x_{13}}y_{12}x_{23})+2\lambda(\overline{y_{13}}x_{12}x_{23}),$$

unabhängig davon, nach welcher Zeile oder Spalte entwickelt wird, falls nur beide Determinanten nach derselben Zeile oder Spalte entwickelt werden. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} \eta_1 & y_{12} & y_{13} \\ \overline{y_{12}} & \xi_2 & x_{23} \\ \overline{y_{13}} & \overline{x_{23}} & \xi_3 \end{pmatrix} = \eta_1\xi_2\xi_3 - \eta_1\mu(x_{23}) - \xi_2\mu(y_{13}) - \xi_3\mu(y_{12}) + 2\lambda(\overline{y_{12}}\,y_{13}\,\overline{x_{23}})$$

ergibt sich für die rechte Seite von (7.12)

$$\xi_1\xi_2\xi_3 - \xi_1\mu(x_{23}) - \xi_2\mu(x_{13}) - \xi_3\mu(x_{12}) + 2\lambda(\overline{x_{12}}\,x_{13}\,\overline{x_{23}}) +$$
$$+\xi_1\xi_2\xi_3 + \eta_1\xi_2\xi_3 - (\xi_1+\eta_1)\mu(x_{23}) - 2\xi_2\lambda(x_{13}\overline{y_{13}}) - 2\xi_3\lambda(x_{12}\overline{y_{12}}) + 2\lambda(\overline{x_{13}}\,y_{12}\,x_{23}) + 2\lambda(\overline{y_{13}}\,x_{12}\,x_{23}) +$$
$$+\eta_1\xi_2\xi_3 - \eta_1\mu(x_{23}) - \xi_2\mu(y_{13}) - \xi_3\mu(y_{12}) + 2\lambda(\overline{y_{12}}\,y_{13}\,\overline{x_{23}}) =$$
$$= 2(\xi_1+\eta_1)\xi_2\xi_3 - 2(\xi_1+\eta_1)\mu(x_{23}) - \xi_2\mu(x_{13}+y_{13}) - \xi_3\mu(x_{12}+y_{12}) + 2\lambda((\overline{x_{12}}+\overline{y_{12}})(x_{13}+y_{13})\overline{x_{23}}),$$

das aber ist die linke Seite von (7.12).
Entsprechend erhält man Additionstheoreme für die übrigen Zeilen beziehungsweise Spalten.

(g) Für alle $A,B \in K[X]$, $X \in \mathfrak{h}_3^+(\mathcal{C}_8)$ gilt

(7.13) $\quad \det(A\circ B) = \det A . \det B$

Speziell gilt daher

(7.14) $\quad \det X^k = \det^k X$.

Dazu: Da $\mathfrak{h}_3^+$ eine Jordan-Algebra ist, ist $K[X]$ eine assoziative Teilalgebra von $\mathfrak{h}_3^+$. Die Gleichung $\chi_\tau(X) = \tau^3 - \Lambda(X)\tau^2 + G_2(X)\tau - \det X$ ist das Minimalpolynom des allgemeinen Elementes X von $\mathfrak{h}_3^+$, daher ist $\det X$ multiplikativ (vergleiche [6]).

§8 Der Fall n=4

1. In §5 haben wir gezeigt, dass $\Lambda: X \longrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}X + \mathrm{Spur}\overline{X})$ auf $\mathcal{C}_{8,4}$ eine assoziative Linearform ist, dass auf $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ daher $\Lambda: X \longrightarrow \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}X + \mathrm{Spur}\overline{X}) = \mathrm{Spur}X$ eine symmetrische und assoziative Linearform ist und dass Λ nichtausgeartet ist auf $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$.
Es gilt

Satz 8.1: $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ ist eine zentral-einfache, schwach-assoziative und kommutative Algebra der Dimension

(8.1) $\quad \dim\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8) = 4 + \frac{1}{2}.4.3.\dim\mathcal{C}_8 = 52$

über dem kommutativen Körper K mit $\mathrm{Char}K \neq 2,3$.
$\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ besitzt die schwach-kommutative-assoziative Jordan-Teilalgebra $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{C}_8)$ der Dimension

(8.2) $\quad \dim\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{C}_8) = 4 + \frac{4.2}{4}.\dim\mathcal{C}_8 = 20$

über dem kommutativen Körper K mit $\mathrm{Char}K \neq 2,3$.

Es seien $A,B \in \mathfrak{h}_4^+$. Nach (5.8) können wir diese Elemente charakterisieren durch

$A = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4;a_{12},a_{13},a_{14},a_{23},a_{24},a_{34})$,
$B = (\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4;b_{12},b_{13},b_{14},b_{23},b_{24},b_{34})$; $\alpha_i,\beta_i \in K$, $a_{ij},b_{ij} \in \mathcal{C}_8$.

Es gilt $A\circ B = D = (\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4;d_{12},d_{13},d_{14},d_{23},d_{24},d_{34})$ mit

(8.3) $\quad \delta_i = \alpha_i\beta_i + \lambda(a_{ij}\overline{b_{ij}}) + \lambda(a_{ik}\overline{b_{ik}}) + \lambda(a_{im}\overline{b_{im}})$
$\qquad i,j,k,m \in \{1,2,3,4\}$, $i,j,k,m \neq$, $x_{rs} = \overline{x_{sr}}$.

(8.4) $\quad d_{ij} = \frac{1}{2}((\beta_i+\beta_j)a_{ij} + (\alpha_i+\alpha_j)b_{ij} + (a_{ik}\overline{b_{jk}} + b_{ik}\overline{a_{jk}}) + (a_{im}\overline{b_{jm}} + b_{im}\overline{a_{jm}}))$
$\qquad i,j,k,m \in \{1,2,3,4\}$, $i,j,k,m \neq$, $x_{rs} = \overline{x_{sr}}$.

Es seien $A,B \in \mathfrak{h}_4^{++}$. Nach (5.30) können wir diese Elemente charakterisieren durch

$A = (\alpha_1,\alpha_2;\alpha_1',\alpha_2';a_{12},a_{14})$,
$B = (\beta_1,\beta_2;\beta_1',\beta_2';b_{12},b_{14})$; $\alpha_i,\alpha_i',\beta_i,\beta_i' \in K$, $a_{ij},b_{ij} \in \mathcal{C}_8$.

Es gilt $A\circ B = D = (\delta_1,\delta_2;\delta_1',\delta_2';d_{12},d_{14})$ mit

(8.5) $\quad \delta_i = \alpha_i\beta_i + \alpha_i'\beta_i' + \lambda(a_{12}\overline{b_{12}}) + \lambda(a_{14}\overline{b_{14}})$, $\quad i=1,2$

(8.6) $\quad \delta_i' = \alpha_i\beta_i' + \beta_i\alpha_i' + \lambda(a_{12}\overline{b_{14}}) + \lambda(a_{14}\overline{b_{12}})$, $\quad i=1,2$

(8.7) $d_{1i} = \frac{1}{2}((\alpha_1+\alpha_2)b_{1i}+(\beta_1+\beta_2)a_{1i}+(\alpha_1'+\alpha_2')b_{1i+2}+(\beta_1'+\beta_2')a_{1i+2})$
$i=2,4 \pmod 4$.

2. Im Folgenden werden wir uns mit Idempotenten beschäftigen. Allgemein werden sich kaum alle Idempotente von $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{L}_8)$ in geschlossener Form angeben lassen. Es lässt sich jedoch die Frage nach den Idempotenten von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{L}_8)$ beantworten.

Jedes Element $X \in \mathfrak{h}_4^+$ lässt sich, wie wir in §5 gesehen haben, in eindeutiger Weise zerlegen in die unter dem involutorischen Automorphismus $\phi_1 : X=(x_{ij}) \longrightarrow (x_{i+2,j+2})$ invarianten Elemente und diejenigen, die auf ihr Negatives abgebildet werden:

$X = \frac{1}{2}(X+\phi_1(X))+\frac{1}{2}(X-\phi_1(X)) = X_1+X_2$ mit $X_1 \in \mathfrak{h}_4^{++}$, $X_2 \in \mathfrak{h}_4^{+-}$.

Mit $X = (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4;x_{12},x_{13},x_{14},x_{23},x_{24},x_{34})$ erhalten wir

$X_1 = \frac{1}{2}(\xi_1+\xi_3,\xi_2+\xi_4,\xi_3+\xi_1,\xi_4+\xi_2;x_{12}+x_{34},x_{13}+\overline{x_{13}},x_{14}+\overline{x_{23}},x_{23}+\overline{x_{14}},x_{24}+\overline{x_{24}},x_{34}+x_{12}) =$

$= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2;a_{12},\alpha_1',a_{14},\overline{a_{14}},\alpha_2',a_{12})$, charakterisiert durch

(8.8) $X_1 = (\alpha_1,\alpha_2;\alpha_1',\alpha_2';a_{12},a_{14})$

und

$X_2 = \frac{1}{2}(\xi_1-\xi_3,\xi_2-\xi_4,\xi_3-\xi_1,\xi_4-\xi_2;x_{12}-x_{34},x_{13}-\overline{x_{13}},x_{14}-\overline{x_{23}},x_{23}-\overline{x_{14}},x_{24}-\overline{x_{24}},x_{34}-x_{12}) =$

$= (\beta_1,\beta_2,-\beta_1,-\beta_2;b_{12},b_1',b_{14},-\overline{b_{14}},b_2',-b_{12})$ mit $\overline{b_i'}=-b_i'$, also $b_i' \in K^\perp$ mit $\mathcal{L}_8=K\oplus K^\perp$. Wir können daher X_2 und somit die Elemente von $\mathfrak{h}_4^{+-}(\mathcal{L}_8)$ charakterisieren durch

(8.9) $X_2 = (\beta_1,\beta_2;b_1',b_2';b_{12},b_{14})$.

Sie sind von der Form

(8.10) $X_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 & b_{12} & b_1' & b_{14} \\ \overline{b_{12}} & \beta_2 & -\overline{b_{14}} & b_2' \\ -b_1' & -b_{14} & -\beta_1 & -b_{12} \\ \overline{b_{14}} & -b_2' & -\overline{b_{12}} & -\beta_2 \end{pmatrix}$ $\quad \beta_1,\beta_2 \in K,\ b_1',b_2' \in K^\perp$
$b_{12},b_{14} \in \mathcal{L}_8=K\oplus K^\perp$.

Für $A,B \in \mathfrak{h}_4^{+-}$ gilt stets $A \circ B \in \mathfrak{h}_4^{++}$, denn $\phi_1(A\circ B) = \phi_1(A)\circ\phi_1(B) =$
$= (-A)\circ(-B) = A\circ B$.

Für $A \in \mathfrak{h}_4^{++}, B \in \mathfrak{h}_4^{+-}$ gilt stets $A\circ B \in \mathfrak{h}_4^{+-}$, denn
$\phi_1(A\circ B) = \phi_1(A)\circ\phi_1(B) = A\circ(-B) = -A\circ B$.

Für ein Idempotent $X=X_1+X_2$ von $\mathfrak{h}_4^+$ muss also gelten:

$(X_1+X_2)^2 = X_1^2+2X_1\circ X_2+X_2^2 = X_1+X_2$, also, da $\mathfrak{h}_4^+ = \mathfrak{h}_4^{++}+\mathfrak{h}_4^{+-}$ eine direkte Zerlegung ist:

$X_1^2+X_2^2 = X_1$ und $2X_1\circ X_2 = X_2$.

Wir schränken die Aufgabe, diese Elemente zu bestimmen, ein und suchen zunächst die Elemente $X=X_1+X_2$ aus $\mathfrak{h}_4^+$ auf, die die Eigenschaft

(f) $\quad X_1^2 = (1-\varkappa)X_1$ mit rationalem $\varkappa$

besitzen, für die also gilt:

$X_1^2 = (1-\varkappa)X_1$, $X_2^2 = \varkappa X_1$, $2X_1\circ X_2 = X_2$.

Das ist eine echte Einschränkung, denn:

In §6 haben wir die Idempotente von $\mathfrak{h}_2^+(\mathcal{L}_8)$ bestimmt. Das waren genau die Elemente der Form $X = (\xi,1-\xi;x)$ mit $\det X = 0$. Daher ist $X = (1,0,0,1;x_{12},0,0,0,0,x_{34})$ mit $\mu(x_{12})=\mu(x_{34})=0$ Idempotent von $\mathfrak{h}_4^+$. Es gilt $X = X_1+X_2$ mit

$X_1 = \frac{1}{2}(1,1;0,0;x_{12}+x_{34},0)$, $X_2 = \frac{1}{2}(1,-1;0,0;x_{12}-x_{34},0)$.

Es folgt sofort

$X_2^2 = (.,.;.,.;0,.) \neq \varkappa X_1 = (.,.;.,.;\frac{1}{2}\varkappa(x_{12}+x_{34}),.)$.

Behalten wir die Bezeichnungen von (8.8) bei, so ergeben sich aus der Eigenschaft (f) die folgenden Bedingungen

(1) $\quad \alpha_1^2+\alpha_1'^2+\mu(a_{12})+\mu(a_{14}) = (1-\varkappa)\alpha_1$

(2) $\quad \alpha_2^2+\alpha_2'^2+\mu(a_{12})+\mu(a_{14}) = (1-\varkappa)\alpha_2$

(3) $\quad 2\alpha_1\alpha_1'+2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}}) = (1-\varkappa)\alpha_1'$

(4) $\quad 2\alpha_2\alpha_2'+2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}}) = (1-\varkappa)\alpha_2'$

(5) $\quad (\alpha_1+\alpha_2)a_{12}+(\alpha_1'+\alpha_2')a_{14} = (1-\varkappa)a_{12}$

(6) $\quad (\alpha_1+\alpha_2)a_{14}+(\alpha_1'+\alpha_2')a_{12} = (1-\varkappa)a_{14}$

Aus (1) und (2) folgt $\alpha_1(1-\varkappa-\alpha_1)-\alpha_1'^2 = \alpha_2(1-\varkappa-\alpha_2)-\alpha_2'^2$.

Aus (3) und (4) folgt $(2\alpha_1-1+\varkappa)\alpha_1' = (2\alpha_2-1+\varkappa)\alpha_2'$

Es sei zunächst $\alpha_1=\frac{1-\varkappa}{2}$.

Es folgt $\alpha_2=\frac{1-\varkappa}{2}$ oder $\alpha_2'=0$.

a) $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1-\varkappa}{2}$. Aus der aus (1) und (2) gewonnenen Bedingung ergibt sich $\alpha_1'=\pm\alpha_2'$.

1) $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1-\varkappa}{2}$, $\alpha_1'=\alpha_2'\neq 0$.

Aus (1) folgt $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=(\frac{1-\varkappa}{2})^2-\alpha_1'^2$. Aus (3) folgt $2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=0$. Aus (5) folgt $2\alpha_1'a_{14}=0$, daher $a_{14}=0$, daher aus (6) $a_{12}=0$, also $(\frac{1-\varkappa}{2})^2=\alpha_1'^2$, also $\alpha_1'=\alpha_2'=\pm\frac{1-\varkappa}{2}$.

Damit haben wir

I. $X_1=(\frac{1-\varkappa}{2},\frac{1-\varkappa}{2};\pm\frac{1-\varkappa}{2},\pm\frac{1-\varkappa}{2};0,0)$

2) $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1-\varkappa}{2}$, $\alpha_1'=-\alpha_2'$, daher aus (1) $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=(\frac{1-\varkappa}{2})^2-\alpha_1'^2$ und aus (3) $2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=0$.

II. $X_1=(\frac{1-\varkappa}{2},\frac{1-\varkappa}{2};\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$ mit $2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=\mu(a_{12})+\mu(a_{14})-$
$-(\frac{1-\varkappa}{2})^2+\alpha'^2=0$.

b) $\alpha_1=\frac{1-\varkappa}{2}$, $\alpha_2\neq\alpha_1$, $\alpha_2'=0$. Aus (4) folgt $2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=0$, aus (5) $(\frac{1-\varkappa}{2}-\alpha_2)a_{12}=\alpha_1'a_{14}$, aus (6) $(\frac{1-\varkappa}{2}-\alpha_2)a_{14}=\alpha_1'a_{12}$.

Daraus folgt
$$(\frac{1-\varkappa}{2}-\alpha_2)\mu(a_{12})=\alpha_1'a_{14}\overline{a_{12}}$$
$$(\frac{1-\varkappa}{2}-\alpha_2)\mu(a_{14})=\alpha_1'a_{12}\overline{a_{14}}$$

Somit $(\frac{1-\varkappa}{2}-\alpha_2)(\mu(a_{12})+\mu(a_{14}))=0$, daher $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=0$, also folgt aus (1) $\alpha_1'=\pm\frac{1-\varkappa}{2}$ und aus (2) $\alpha_2(1-\varkappa-\alpha_2)=0$, daher $\alpha_2=0$ oder $\alpha_2=1-\varkappa$

1) $\alpha_2=0$. Es folgt aus (5) $\frac{1-\varkappa}{2}a_{12}=\pm\frac{1-\varkappa}{2}a_{14}$, also im Falle $\varkappa\neq1$, $a_{12}=\pm a_{14}$. Ist $\varkappa=1$, so ist aber $\alpha_1=0$, daher $\alpha_1=\alpha_2$ entgegen Voraussetzung. Wir haben:

III. $X_1=(\frac{1-\varkappa}{2},0;\pm\frac{1-\varkappa}{2},0;a,\pm a)$ mit $\mu(a)=0$.

2) $\alpha_2=1-\varkappa$. Daher $\frac{1-\varkappa}{2}a_{12}=\mp\frac{1-\varkappa}{2}a_{14}$, also im Falle $\varkappa\neq1$: $a_{12}=\mp a_{14}$. Ist $\varkappa=1$, so folgt $\alpha_1=\alpha_2$ entgegen Voraussetzung. Wir haben:

IV. $X_1=(\frac{1-\varkappa}{2},1-\varkappa;\pm\frac{1-\varkappa}{2},0;a,\mp a)$ mit $\mu(a)=0$.

Wir können daher annehmen, dass $\alpha_1\neq\frac{1-\varkappa}{2}$ ist. Daher erhalten wir aus der oben aus (3) und (4) abgeleiteten Gleichung:

$\alpha_1'=\frac{2\alpha_2-1+\varkappa}{2\alpha_1-1+\varkappa}\alpha_2'$

Aus (5) erhalten wir $(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)a_{12}=(\alpha_1'+\alpha_2')a_{14}$

Aus (6) erhalten wir $(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)a_{14}=(\alpha_1'+\alpha_2')a_{12}$

daher $(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)(\mu(a_{12})+\mu(a_{14}))=2(\alpha_1'+\alpha_2')\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})$

und $2(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=(\alpha_1'+\alpha_2')(\mu(a_{12})+\mu(a_{14}))$

Angenommen es gilt $(\alpha_1'+\alpha_2')(\mu(a_{12})+\mu(a_{14}))\neq0$, also $2(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})\neq0$. Es ergibt sich $(\alpha_1'+\alpha_2')(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)^{-1}=(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1'+\alpha_2')^{-1}$, also $1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2=\pm(\alpha_1'+\alpha_2')$.

a) $\alpha_1'=\frac{2\alpha_2-1+\varkappa}{2\alpha_1-1+\varkappa}\alpha_2'$ und $\alpha_1'+\alpha_2'=1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2$.

Es folgt $(2\alpha_2-1+\varkappa)\alpha_2'+\alpha_2'(2\alpha_1-1+\varkappa)=(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_1-1+\varkappa)$, oder $2(\alpha_1+\alpha_2-1+\varkappa)\alpha_2'=(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)(2\alpha_1-1+\varkappa)$, daher $\alpha_2'=\frac{1-\varkappa-2\alpha_1}{2}$ und somit $\alpha_1'=\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2}$.

Aus (5) erhalten wir nun $(\alpha_1+\alpha_2)a_{12}+(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)a_{14}=(1-\varkappa)a_{12}$, daher $a_{12}=a_{14}$. Damit folgt aus (1) $(\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2})^2+\alpha_1^2+2\mu(a_{12})=(1-\varkappa)\alpha_1$, also $8\mu(a_{12})=4(1-\varkappa)\alpha_1-4\alpha_1^2-(1-\varkappa-2\alpha_2)^2=4(1-\varkappa-\alpha_1)\alpha_1-(1-\varkappa-2\alpha_2)^2$. Aus (3):

$2\alpha_1(\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2})+2\mu(a_{12})=(1-\varkappa)(\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2})$, also

$8\mu(a_{12})=2(1-\varkappa)(1-\varkappa-2\alpha_2)-4\alpha_1(1-\varkappa-2\alpha_2)=2(1-\varkappa-2\alpha_1)(1-\varkappa-2\alpha_2)$. Daraus ergibt sich durch elementare Rechnung

$\alpha_1=\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2}$ oder $\alpha_1=\frac{3-3\varkappa-2\alpha_2}{2}$

Schliesslich ergibt sich damit im ersten Fall: $\mu(a_{12})=\alpha_1\alpha_2$
im zweiten Fall: $\mu(a_{12})=\alpha_1\alpha_2-\frac{(\varkappa-1)^2}{2}$

Wir haben:

V. $X_1=(\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2},\alpha_2;\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2},\alpha_2;a,a)$ mit $\mu(a)=\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2}\alpha_2$

VI. $X_1=(\frac{3-3\varkappa-2\alpha_2}{2},\alpha_2;\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2},\alpha_2-1+\varkappa;a,a)$ mit $\mu(a)=\frac{3-3\varkappa-2\alpha_2}{2}\alpha_2-\frac{(\varkappa-1)^2}{2}$

b) $\alpha_1'=\frac{2\alpha_2-1+\varkappa}{2\alpha_1-1+\varkappa}$ und $\alpha_1'+\alpha_2'=-(1-\varkappa-\alpha_1-\alpha_2)$.

Analog zu der obigen Rechnung erhalten wir

$\alpha_2'=\frac{2\alpha_1-1+\varkappa}{2}$ und $\alpha_1'=\frac{2\alpha_2-1+\varkappa}{2}$.

Aus (5) erhalten wir $(\alpha_1+\alpha_2)a_{12}+(\alpha_1+\alpha_2-1+\varkappa)a_{14}=(1-\varkappa)a_{12}$, also $a_{12}=-a_{14}$.

Aus (1) erhalten wir

$8\mu(a_{12})=-(2\alpha_2-1+\varkappa)^2-4\alpha_1^2+4(1-\varkappa)\alpha_1=4(1-\varkappa-\alpha_1)\alpha_1-(2\alpha_2-1+\varkappa)^2$

Aus (3) erhalten wir

$8\mu(a_{12})=4\alpha_1(2\alpha_2-1+\varkappa)-2(1-\varkappa)(2\alpha_2-1+\varkappa)=2(2\alpha_2-1+\varkappa)(2\alpha_1-1+\varkappa)$

Daraus ergibt sich nach zu oben analoger Rechnung

$\alpha_1=\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2}$ oder $\alpha_1=\frac{3-3\varkappa-2\alpha_2}{2}$.

Schliesslich ergibt sich damit im ersten Fall: $\mu(a_{12})=\alpha_1\alpha_2$

im zweiten Fall: $\mu(a_{12})=\alpha_1\alpha_2-\frac{(\varkappa-1)^2}{2}$

Wir haben:

VII. $X_1 = (\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2},\alpha_2;\frac{2\alpha_2-1+\varkappa}{2},-\alpha_2;a,-a)$ mit $\mu(a)=\frac{1-\varkappa-2\alpha_2}{2}-\alpha_2$

VIII. $X_1 = (\frac{3-3\varkappa-2\alpha_2}{2},\alpha_2;\frac{2\alpha_2-1+\varkappa}{2},1-\varkappa-\alpha_2;a,-a)$ mit $\mu(a)=\frac{3-3\varkappa-2\alpha_2}{2}-\alpha_2-\frac{(\varkappa-1)^2}{2}$.

Es sei jetzt also die Annahme $(\alpha_1'+\alpha_2')(\mu(a_{12})+\mu(a_{14}))\neq 0$ verletzt, etwa durch $\alpha_1'=-\alpha_2'$.

Also haben wir $\alpha_1\neq\frac{1-\varkappa}{2}$ und $\alpha_1'=-\alpha_2'$.

Aus (5) erhalten wir $(\alpha_1+\alpha_2-1+\varkappa)a_{12}=0$-

Aus (6) erhalten wir $(\alpha_1+\alpha_2-1+\varkappa)a_{14}=0$.

a) $a_{12}=0$. Aus (3) folgt dann $(2\alpha_1-1+\varkappa)\alpha_1'=0$.

α) $\alpha_1'=0$, daher $\alpha_2'=0$.

i) $a_{14}=0$. Daher $\alpha_1^2=(1-\varkappa)\alpha_1$, $\alpha_2^2=(1-\varkappa)\alpha_2$.

Aus $\alpha_1(\alpha_1-1+\varkappa)=0$ folgt $\alpha_1=0$ oder $\alpha_1=1-\varkappa$.
Aus $\alpha_2(\alpha_2-1+\varkappa)=0$ folgt $\alpha_2=0$ oder $\alpha_2=1-\varkappa$.
Also:

IX. $X_1 = (\alpha_1,\alpha_2;0,0;0,0)$ mit α_1 und α_2 gleich 0 oder $1-\varkappa$.

ii) $a_{14}\neq 0$, daher $\alpha_2=1-\varkappa-\alpha_1$, also $\mu(a_{14})=(1-\varkappa-\alpha_1)\alpha_1=\alpha_1\alpha_2$.
Wir haben

X. $X_1 = (\alpha_1,1-\varkappa-\alpha_1;0,0;0,a)$ mit $\mu(a)=(1-\varkappa-\alpha_1)\alpha_1$.

β) $\alpha_1'\neq 0$. Aus (3) folgt $\alpha_1=\frac{1-\varkappa}{2}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

b) $a_{12}\neq 0$. Aus (5) folgt $\alpha_2=1-\varkappa-\alpha_1$ und aus (1)

$\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=(1-\varkappa)\alpha_1-\alpha_1^2-\alpha_1'^2=\alpha_1\alpha_2-\alpha_1'^2$.

Aus (3) folgt $(1-\varkappa-2\alpha_1)\alpha_1'=2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_1'$. Wir haben:

XI. $X_1 = (\alpha_1,1-\varkappa-\alpha_1;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$ mit

$\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=(1-\varkappa)\alpha_1-\alpha_1^2-\alpha'^2$, $2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=(1-\varkappa)\alpha'-2\alpha_1\alpha'$.

Es bleibt die Möglichkeit $\alpha_1'+\alpha_2'\neq 0$, daher $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=0$. Also $\alpha_1\neq\frac{1-\varkappa}{2}$, $\mu(a_{12})=-\mu(a_{14})$.

Aus (1) folgt $\alpha_1'^2+\alpha_1^2=(1-\varkappa)\alpha_1$, daher $\alpha_1'^2=\alpha_1(1-\varkappa-\alpha_1)$.

Aus (2) folgt $\alpha_2'^2+\alpha_2^2=(1-\varkappa)\alpha_2$, daher $\alpha_2'^2=\alpha_2(1-\varkappa-\alpha_2)$.

Aus (5) und (6) gewinnen wir

$$\begin{array}{l}(\alpha_1+\alpha_2)\mu(a_{12})+(\alpha_1'+\alpha_2')a_{14}\overline{a_{12}}=(1-\varkappa)\mu(a_{12})\\ (\alpha_1+\alpha_2)\mu(a_{14})+(\alpha_1'+\alpha_2')a_{12}\overline{a_{14}}=(1-\varkappa)\mu(a_{14})\\ \hline \end{array}$$

$$2(\alpha_1'+\alpha_2')\lambda(a_{12}\overline{a_{14}}) = 0 ,$$

daher aus (3) und (4) $(2\alpha_1-1+\varkappa)\alpha_1'=0$, also $\alpha_1'=0$, und $\alpha_1^2=(1-\varkappa)\alpha_1$.

$(2\alpha_2-1+\varkappa)\alpha_2'=0$, also $\alpha_2'=0$ oder $\alpha_2=\frac{1-\varkappa}{2}$.

Wegen $\alpha_1'+\alpha_2'\neq 0$ kann der Fall $\alpha_2'=0$ nicht eintreten. Es bleibt:

$\alpha_1=0$ oder $\alpha_1=1-\varkappa$, $\alpha_1'=0$, $\alpha_2=\frac{1-\varkappa}{2}$.

a) $\alpha_1=0$. Aus (2) folgt $\alpha_2'^2-(\frac{1-\varkappa}{2})^2=0$, also $\alpha_2'=\pm\frac{1-\varkappa}{2}$.

Aus (5) folgt $\frac{1-\varkappa}{2}a_{12}+\alpha_2'a_{14}=(1-\varkappa)a_{12}$, daher $a_{14}=\pm a_{12}$ oder $\varkappa=1$. Für $\varkappa=1$ folgt $\alpha_2'=0$. Widerspruch.

Aus (6) folgt $\frac{1-\varkappa}{2}a_{14}+\alpha_2'a_{12}=(1-\varkappa)a_{14}$.

Wir haben:

XII. $X_1 = (0,\frac{1-\varkappa}{2};0,\pm\frac{1-\varkappa}{2};a,\pm a)$ mit $\mu(a)=0$.

b) $\alpha_1=1-\varkappa$, $\alpha_1'=0$, $\alpha_2=\frac{1-\varkappa}{2}$.

Aus (5) folgt $\frac{3}{2}(1-\varkappa)a_{12}+\alpha_2'a_{14}=(1-\varkappa)a_{12}$, also wegen (2) $\alpha_2'=\pm\frac{1-\varkappa}{2}$:

$\frac{1-\varkappa}{2}a_{12}=-\alpha_2'a_{14}=\mp\frac{1-\varkappa}{2}a_{14}$, daher $a_{12}=\mp a_{14}$ oder $\varkappa=1$. Für $\varkappa=1$ folgt $\alpha_2'=0$. Widerspruch. Daher

XIII. $X_1 = (1-\varkappa,\frac{1-\varkappa}{2};0,\pm\frac{1-\varkappa}{2};a,\mp a)$ mit $\mu(a)=0$.

Wir können diese 13 Typen zusammenfassen zu 5 verbleibenden Typen, wir haben:

Satz 8.2: Die Elemente $X_1 \in \mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{L}_8)$, die die Bedingung (f) erfüllen, sind von einem der folgenden fünf Typen:

(i) $X_1 = (1-\varkappa, 1-\varkappa; 0,0; 0,0)$

(ii) $X_1 = (\frac{1}{2}(1-\varkappa), \frac{1}{2}(1-\varkappa); \pm\frac{1}{2}(1-\varkappa), \pm\frac{1}{2}(1-\varkappa); 0,0)$

(iii) $X_1 = (\alpha, \frac{1}{2}(1-2\alpha-\varkappa); \pm\alpha, \pm\frac{1}{2}(1-2\alpha-\varkappa); a, \pm a)$ mit $\mu(a)=\frac{1}{2}\alpha(1-2\alpha-\varkappa)$

(iv) $X_1 = (\alpha, \frac{1}{2}(3-3\varkappa-2\alpha); \pm(\alpha+\varkappa-1), \pm\frac{1}{2}(1-\varkappa-2\alpha); a, \pm a)$ mit
$$\mu(a)=\frac{1}{2}\alpha(3-3\varkappa-2\alpha)-\frac{(1-\varkappa)^2}{2}$$

(v) $X_1 = (\alpha, 1-\varkappa-\alpha; \alpha', -\alpha'; a_{12}, a_{14})$ mit $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=\alpha(1-\varkappa-\alpha)-\alpha'^2$,
$$2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=(1-\varkappa-2\alpha)\alpha'.$$

Für $\varkappa=0$ wird (f) zu $X_1^2 = X_1$, und wir haben

Satz 8.3: Die Idempotente von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{L}_8)$ sind genau die Elemente vom Typ

$I_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}; 0,0)$

$I_2 = (\alpha, \frac{1}{2}(1-2\alpha); \pm\alpha, \pm\frac{1}{2}(1-2\alpha); a, \pm a)$ mit $\mu(a)=\frac{1}{2}(1-2\alpha)\alpha$

$I_3 = (\alpha, \frac{1}{2}(3-2\alpha); \pm(\alpha-1), \pm\frac{1}{2}(1-2\alpha); a, \pm a)$ mit $\mu(a)=\frac{1}{2}\alpha(3-2\alpha)-\frac{1}{2}$

$I_4 = (\alpha, 1-\alpha; \alpha', -\alpha'; a_{12}, a_{14})$ mit $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=\alpha(1-\alpha)-\alpha'^2$,
$$2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=(1-2\alpha)\alpha'.$$

Für $\varkappa=1$ wird (f) zu $X_1^2 = 0$, und wir haben

Satz 8.4: Die Elemente von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{L}_8)$, deren Quadrate verschwinden, sind genau die Elemente vom Typ

$N = (\alpha, -\alpha; \alpha', -\alpha'; a_{12}, a_{14})$ mit $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})+\alpha^2+\alpha'^2=0$,
$$2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})+2\alpha\alpha'=0 .$$

3. Es sei $\varkappa=0$. Wir interessieren uns für vollständige Orthogonalsysteme Idempotenter. Wir fragen daher nach Bedingungen dafür, dass zwei Idempotente von $\mathfrak{h}_4^{++}$ orthogonal zueinander sind.

Wann sind zwei Idempotente vom Typ I_1 zueinander orthogonal?

$E_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0,0)$ und $E_2 = E-E_1$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 2.

Wann sind zwei Idempotente vom Typ I_2 zueinander orthogonal?

Wir wählen ein festes Vorzeichen für ein Idempotent E_1 vom Typ I_2. Ein Idempotent vom Typ I_2 mit dem entgegengesetzten Vorzeichen ist dazu orthogonal. Zwei Idempotente vom Typ I_2 mit gleichem Vorzeichen sind genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt:

$E_1=(\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \pm\alpha, \pm(\frac{1}{2}-\alpha); a, \pm a)$, $E_2=(\xi, \frac{1}{2}-\xi; \pm\xi, \pm(\frac{1}{2}-\xi); x, \pm x)$,
$$E_1 \cdot E_2=0 \iff \begin{cases} 2\alpha\xi+2\lambda(a\overline{x})=0 \\ \frac{1}{2}(a+x)=0 \\ 2(\frac{1}{2}-\alpha)(\frac{1}{2}-\xi)+2\lambda(a\overline{x})=0 \end{cases}$$

also $a=-x$ und $\xi=\frac{1}{2}-\alpha$.

Somit existieren zu jedem Idempotent E_1 vom Typ I_2,

$E_1=(\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \pm\alpha, \pm(\frac{1}{2}-\alpha); a, \pm a)$, die orthogonalen Idempotente

$E_2=(\frac{1}{2}-\alpha, \alpha; \pm(\frac{1}{2}-\alpha), \pm\alpha; -a, \mp a)$ und $E_3=(\xi, \frac{1}{2}-\xi; \mp\xi, \mp(\frac{1}{2}-\xi); x, \mp x)$.

Die Idempotente E_2 und E_3 sind aus demselben Grunde orthogonal zueinander wie E_1 und E_2.

Wann sind zwei Idempotente Vom Typ I_3 zueinander orthogonal?

Wir wählen zunächst zwei solche Idempotente mit gleichem Vorzeichen. Diese sind genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

$E_1=(\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; \pm(\alpha-1), \pm(\frac{1}{2}-\alpha); a, \pm a)$, $E_2=(\xi, \frac{3}{2}-\xi; \pm(\xi-1), \pm(\frac{1}{2}-\xi); x, \pm x)$
$$E_1 \circ E_2=0 \iff \begin{cases} \alpha\xi+(\xi-1)(\alpha-1)+2\lambda(a\overline{x})=0 \\ x+a=0 \\ \alpha(\xi-1)+(\alpha-1)\xi+2\lambda(a\overline{x})=0 \end{cases}$$

also $a=-x$. Aus der Randbedingung ergibt sich:

$2\mu(a)=2\alpha\xi-\alpha-\xi+1=2\alpha\xi-\alpha-\xi$. Das ist ein Widerspruch. Zwei solche Idempotente vom Typ I_3 können somit nicht orthogonal zueinander sein.

Wir wählen jetzt zwei Idempotente vom Typ I_3 mit entgegengesetztem Vorzeichen. Zwei solche Idempotente sind genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt:

$E_1=(\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; \alpha-1, \frac{1}{2}-\alpha; a, a)$, $E_2=(\xi, \frac{3}{2}-\xi; -(\xi-1), -(\frac{1}{2}-\xi); x, -x)$
$$E_1 \cdot E_2=0 \iff \begin{cases} 2\alpha\xi-2(\alpha-1)(\xi-1)=0 \\ 2(\frac{3}{2}-\alpha)(\frac{3}{2}-\xi)-2(\frac{1}{2}-\alpha)(\frac{1}{2}-\xi)=0 \end{cases}$$

also einerseits $\alpha+\xi=1$, andererseits $\alpha+\xi=2$. Widerspruch.

Zwei Idempotente vom Typ I_3 können also nicht orthogonal zueinander sein.

Wann sind zwei Idempotente vom Typ I_4 zueinander orthogonal?

Zwei Idempotente vom Typ I_4 sind genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt:

$E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$, $E_2=(\xi,1-\xi;\xi',-\xi';x_{12},x_{14})$

$$E_1\circ E_2=0 \iff \begin{cases} 2\alpha\xi+2\alpha'\xi'+2\lambda(a_{12}\overline{x_{12}})+2\lambda(a_{14}\overline{x_{14}})=0 \\ a_{12}+x_{12}=0 \\ a_{14}+x_{14}=0 \\ 2\alpha\xi'+2\alpha'\xi+2\lambda(a_{12}\overline{x_{14}})+2\lambda(a_{14}\overline{x_{12}})=0 \\ 2(1-\alpha)(1-\xi)+2\alpha'\xi'+2\lambda(a_{12}\overline{x_{12}})+2\lambda(a_{14}\overline{x_{14}})=0 \\ -2(1-\alpha)\xi'-2(1-\xi)\alpha'+2\lambda(a_{12}\overline{x_{14}})+2\lambda(a_{14}\overline{x_{12}})=0 \end{cases}$$

Es folgt also $a_{12}=-x_{12}$, $a_{14}=-x_{14}$ und $1-\alpha=\xi$, $\alpha'=-\xi'$.
Die Idempotente $E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$ und $E_2=(1-\alpha,\alpha;-\alpha',\alpha';-a_{12},-a_{14})$ vom Typ I_4 sind also orthogonal zueinander.

Wann ist ein Idempotent vom Typ I_1 orthogonal zu einem Idempotent vom Typ I_2?

Wir wählen zunächst solche mit gleichem Vorzeichen:

$E_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2};0,0)$, $E_2=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\frac{1}{2}-\alpha);a,\pm a)$

$$E_1\circ E_2=0 \iff \begin{cases} \alpha=0 \\ a=0 \\ \alpha=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Widerspruch.

Dagegen sind zwei solche Idempotente orthogonal zueinander, wenn die Vorzeichen entgegengesetzt sind, also

$E_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2};0,0)$ und $E_2=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\mp\alpha,\mp(\frac{1}{2}-\alpha);a,\mp a)$ sind orthogonal zueinander.

Wann ist ein Idempotent vom Typ I_1 orthogonal zu einem Idempotent vom Typ I_3?

Wir wählen zunächst solche mit gleichem Vorzeichen:

$E_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2};0,0)$, $E_2=(\alpha,\frac{3}{2}-\alpha;\pm(\alpha-1),\pm(\frac{1}{2}-\alpha);a,\pm a)$

$$E_1\circ E_2=0 \iff \begin{cases} 2\alpha=1 \\ a=0 \\ 2(1-\alpha)=0 \end{cases}$$

also $\alpha=\frac{1}{2}$ und $\alpha=1$. Widerspruch.

Auch bei entgegengesetzten Vorzeichen ergibt sich ein Widerspruch. Ein Idempotent vom Typ I_1 kann also nicht orthogonal sein zu einem Idempotent vom Typ I_3.

Wann ist ein Idempotent vom Typ I_1 orthogonal zu einem Idempotent vom Typ I_4?

$E_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2};0,0)$, $E_2=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$

$$E_1\circ E_2=0 \iff \begin{cases} \alpha'=\mp\alpha \\ a_{12}=\mp a_{14} \\ \alpha'=\pm(1-\alpha) \end{cases} \qquad \text{Widerspruch.}$$

Ein Idempotent vom Typ I_1 kann also nicht orthogonal sein zu einem Idempotent vom Typ I_4.

Wann ist ein Idempotent vom Typ I_2 orthogonal zu einem Idempotent vom Typ I_3?

Wir wählen zunächst gleiche Vorzeichen:

$E_1=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\frac{1}{2}-\alpha);a,\pm a)$, $E_2=(\xi,\frac{3}{2}-\xi;\pm(\xi-1),\pm(\frac{1}{2}-\xi);x,\pm x)$

$$E_1\circ E_2=0 \iff \begin{cases} 2\alpha\xi-\alpha+2\lambda(a\overline{x})=0 \\ a+x=0 \\ 2(\frac{1}{2}-\alpha)(1-\xi)+2\lambda(a\overline{x})=0 \end{cases}$$

also $x=-a$, $\alpha=1-\xi$.
Die Idempotente
$E_1=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\frac{1}{2}-\alpha);a,\pm a)$ und $E_2=(1-\alpha,\frac{1}{2}+\alpha;\mp\alpha,\pm(\alpha-1);-a,\mp a)$ sind orthogonal zueinander, wenn man die entsprechenden Vorzeichen wählt.

Wir wählen nun entgegengesetzte Vorzeichen:

$E_1=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\frac{1}{2}-\alpha);a,\pm a)$, $E_2=(\xi,\frac{3}{2}-\xi;\mp(\xi-1),\mp(\frac{1}{2}-\xi);x,\mp x)$

$$E_1\circ E_2=0 \iff \begin{cases} 2\alpha\xi-2\alpha(\xi-1)=0 \\ 2a=0 \\ 2(\frac{1}{2}-\alpha)(\frac{3}{2}-\xi)-2(\frac{1}{2}-\alpha)(\frac{1}{2}-\xi)=0 \end{cases}$$

also einerseits $\alpha=0$, andererseits $\alpha=1$. Widerspruch.

Wann ist ein Idempotent vom Typ I_2 orthogonal zu einem Idempotent vom Typ I_4?

$E_1=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\frac{1}{2}-\alpha);a,\pm a)$, $E_2=(\xi,1-\xi;\xi',-\xi';x_{12},x_{14})$

$$E_1 \cdot E_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha\xi \pm 2\alpha\xi' + 2\lambda(a\overline{x_{12}}) \pm 2\lambda(a\overline{x_{14}}) = 0 \\ a + \frac{1}{2}x_{12} \pm x_{14} = 0 \\ 2(\frac{1}{2}-\alpha)(1-\xi) \mp 2(\frac{1}{2}-\alpha)\xi' + 2\lambda(a\overline{x_{12}}) \pm 2\lambda(a\overline{x_{14}}) = 0 \end{cases}$$

also $a=-\frac{1}{2}(x_{12} \pm x_{14})$ und $\alpha=\frac{1}{2}(1-\xi \mp \xi')$.

Die Idempotente

$E_1=(\frac{1}{2}(1-\xi \mp \xi'), \frac{1}{2}(\xi \pm \xi'); \pm\frac{1}{2}(1-\xi \mp \xi'), \pm\frac{1}{2}(\xi \pm \xi'); -\frac{1}{2}(x_{12} \pm x_{14}), \mp\frac{1}{2}(x_{12} \pm x_{14}))$
und $E_2=(\xi, 1-\xi; \xi', -\xi'; x_{12}, x_{14})$ sind orthogonal zueinander.

Wann ist ein Idempotent vom Typ I_3 orthogonal zu einem Idempotent vom Typ I_4?

$E_1=(\alpha, \frac{3}{2}-\alpha; \pm(\alpha-1), \pm(\frac{1}{2}-\alpha); a, \pm a)$, $E_2=(\xi, 1-\xi; \xi', -\xi'; x_{12}, x_{14})$

$$E_1 \cdot E_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha\xi + 2(\alpha-1)\xi' + 2\lambda(a\overline{x_{12}}) \pm 2\lambda(a\overline{x_{14}}) = 0 \\ a \mp \frac{1}{2}x_{14} + \frac{3}{2}x_{12} = 0 \\ 2\alpha\xi' \pm 2(\alpha-1)\xi + 2\lambda(a\overline{x_{14}}) \pm 2\lambda(a\overline{x_{12}}) = 0 \\ \mp\frac{1}{2}x_{12} \pm a + \frac{3}{2}x_{14} = 0 \\ 2(\frac{3}{2}-\alpha)(1-\xi) \mp 2(\frac{1}{2}-\alpha)\xi' + 2\lambda(a\overline{x_{12}}) \pm 2\lambda(a\overline{x_{14}}) = 0 \\ \pm 2(1-\xi)(\frac{1}{2}-\alpha) - 2(\frac{3}{2}-\alpha)\xi' + 2\lambda(a\overline{x_{14}}) \pm 2\lambda(a\overline{x_{12}}) = 0 \end{cases}$$

Aus der ersten und dritten Bedingung ergibt sich:
$\alpha\xi \pm (\alpha-1)\xi' = \pm\alpha\xi' + (\alpha-1)\xi$, also $\xi = \pm\xi'$
Aus der fünften und sechsten Bedingung ergibt sich:
$(\frac{3}{2}-\alpha)(1-\xi) \mp (\frac{1}{2}-\alpha)\xi' = (1-\xi)(\frac{1}{2}-\alpha) \mp (\frac{3}{2}-\alpha)\xi'$, also $1-\xi \pm \xi' = 0$. Widerspruch.
Ein Idempotent vom Typ I_3 kann nicht orthogonal sein zu einem Idempotent vom Typ I_4.

Damit sind die Orthogonalitätsbeziehungen unter den Idempotenten von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{L}_8)$ hergeleitet.
Wir wollen jetzt die vollständigen Orthogonalsysteme Idempotenter in $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{L}_8)$ aufsuchen.
Es ergeben sich die folgenden Konsequenzen aus den obigen Untersuchungen:

1. Es gibt kein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter, das ausser Idempotenten vom Typ I_1 und I_2 noch andere Idempotente enthält.
2. Es gibt kein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter, das mehr als ein Idempotent vom Typ I_3 enthält.
3. Es gibt kein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter, das Idempotente vom Typ I_2, I_3 und I_4 enthält.
4. Es gibt kein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter, das

Idempotente vom Typ I_3 und I_4 enthält.
Daher:
Es kann lediglich vollständige Orthogonalsysteme Idempotenter geben, die enthalten:
a. nur Idempotente vom Typ I_1
b. nur Idempotente vom Typ I_2
c. nur Idempotente vom Typ I_4
d. nur Idempotente vom Typ I_1 und I_2
e. nur Idempotente vom Typ I_2 und I_3
f. nur Idempotente vom Typ I_2 und I_4.

ad a: Das einzige vollständige Orthogonalsystem, das hierzu existiert ist das System $E_1=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0, 0)$; $E_2=E-E_1$.

ad b: Es sei $E_1=(\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \alpha, \frac{1}{2}-\alpha; a, a)$. Dazu existieren die orthogonalen Idempotente
$E_2=(\frac{1}{2}-\alpha, \alpha; \frac{1}{2}-\alpha, \alpha; -a, -a)$ und $E_3=(\xi, \frac{1}{2}-\xi; -\xi, -\frac{1}{2}+\xi; x, -x)$.
Orthogonal zu E_3 ist aus demselben Grunde: $E_4=(\frac{1}{2}-\xi, \xi; -(\frac{1}{2}-\xi), -\xi; -x, x)$.

E_1, E_2, E_3, E_4 bildet ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 4.
Andere vollständige Orthogonalsysteme, bestehend nur aus Idempotenten vom Typ I_2 kann es nicht geben.

ad c: Die Orthogonalitätsbedingung gibt zu jedem solchen Idempotent genau ein orthogonalee. Diese beiden bilden ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 2: $E_1=(\alpha, 1-\alpha; \alpha', -\alpha'; a_{12}, a_{14})$, $E_2=E-E_1$.

ad d: Zu $E_1=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}; 0, 0)$ sind die folgenden Idempotente orthogonal:
$E_i=(\alpha_i, \frac{1}{2}-\alpha_i; \mp\alpha_i, \mp(\frac{1}{2}-\alpha_i); a_i, \mp a_i)$ für alle $\alpha_i \in K$, $a_i \in \mathcal{L}_8$.
Ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 2 kann es nicht geben, da dazu $\alpha=\frac{1}{2}$ und $\alpha=0$ gleichzeitig zu erfüllen wäre. Es kommen also nur Systeme infrage, deren Länge mindestens drei ist. Es muss gelten
$\sum_{i=2}^{r} E_i = E-(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}; 0, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}; 0, 0)$.
Daher $\sum_{i=2}^{r} \alpha_i = \frac{1}{2}$ und $\sum_{i=2}^{r}(\frac{1}{2}-\alpha_i) = \frac{1}{2}$, daher $\frac{1}{2}(r-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, also $r=3$.
Es kann daher nur ein System der Länge 3 sein, also:
$E_2=(\alpha, \frac{1}{2}-\alpha; \mp\alpha, \mp(\frac{1}{2}-\alpha); a, \mp a)$, $E_3=(\frac{1}{2}-\alpha, \alpha; \mp(\frac{1}{2}-\alpha), \mp\alpha; -a, \pm a)$.

E_2 und E_3 sind aber nach den Orthogonalitätsbedingungen für Idem-

potente vom Typ I_2 orthogonal zueinander.
Wir haben das vollständige Orthogonalsystem der Länge 3:

$$E_1=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2};0,0),\quad E_2=(\alpha,\tfrac{1}{2}-\alpha;\mp\alpha,\mp(\tfrac{1}{2}-\alpha);a,\mp a),$$
$$E_3=(\tfrac{1}{2}-\alpha,\alpha;\mp(\tfrac{1}{2}-\alpha),\mp\alpha;-a,\pm a)$$

ad e: "ir wählen ein Idempotent vom Typ I_2. Dazu existieren zwei orthogonale Idempotente vom Typ I_3, die aber zueinander nicht orthogonal sein können. Zu jedem Idempotent vom Typ I_2 gibt es andererseits genau eines vom Typ I_3, das mit diesem ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 2 bildet.

$$E_1=(\alpha,\tfrac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\tfrac{1}{2}-\alpha);a,\pm a),\quad E_2=(1-\alpha,\tfrac{1}{2}+\alpha;\mp\alpha,\mp(\tfrac{1}{2}-\alpha);-a,\mp a)=E-E_1.$$

Dieses System enthält das unter a. aufgefundene.

ad f: Wir wählen ein Idempotent vom Typ I_4. Dazu gibt es genau ein orthogonales vom Typ I_4 und genau zwei orthogonale vom Typ I_2, die wiederum beide zueinander orthogonal sind. Es können aber nicht zwei Idempotente vom Typ I_4 vorliegen, da diese ja bereits ein vollständiges Orthogonalsystem bilden.
Es kann kein solches System der Länge 2 geben, da dazu $\alpha=0$ und $\alpha=1$ gleichzeitig zu erfüllen wäre.
Es kann also nur Systeme der Länge 3 geben:

$$E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$$
$$E_2=\tfrac{1}{2}(1-\alpha-\alpha',\alpha+\alpha';+(1-\alpha-\alpha'),+(\alpha+\alpha');-(a_{12}+a_{14}),-(a_{12}+a_{14}))$$
$$E_3=\tfrac{1}{2}(1-\alpha+\alpha',\alpha-\alpha';-(1-\alpha+\alpha'),-(\alpha-\alpha');-(a_{12}-a_{14}),+(a_{12}-a_{14}))$$

Wir haben daher: E_2+E_3 ist ein Idempotent vom Typ I_4. Die Idempotente vom Typ I_4 sind daher zerlegbar in zwei orthogonale Idempotente vom Typ I_2.

Damit sind die vollständigen Orthogonalsysteme von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathfrak{C}_8)$ bestimmt.

Länge 2: (a) $E_1=(\alpha,\tfrac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\tfrac{1}{2}-\alpha);a,\pm a),\quad E_2=E-E_1$

(b) $E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14}),\quad E_2=E-E_1$

Länge 3: (a) $E_1=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};\pm\tfrac{1}{2},\pm\tfrac{1}{2};0,0),\quad E_2=(\alpha,\tfrac{1}{2}-\alpha;\mp\alpha,\mp(\tfrac{1}{2}-\alpha);a,\mp a)$

$E_3=(\tfrac{1}{2}-\alpha,\alpha;\mp(\tfrac{1}{2}-\alpha),\mp\alpha;-a,\pm a)$

(b) $E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$

$E_2=\tfrac{1}{2}((1-\alpha-\alpha'),(\alpha+\alpha');(1-\alpha-\alpha'),(\alpha+\alpha');-(a_{12}+a_{14}),-(a_{12}+a_{14}))$

$E_3=\tfrac{1}{2}((1-\alpha+\alpha'),(\alpha-\alpha');-(1-\alpha+\alpha'),-(\alpha-\alpha');-(a_{12}-a_{14}),(a_{12}-a_{14}))$

Länge 4: $E_1=(\alpha,\tfrac{1}{2}-\alpha;\alpha,\tfrac{1}{2}-\alpha;a,a),\quad E_2=(\tfrac{1}{2}-\alpha,\alpha;\tfrac{1}{2}-\alpha,\alpha;-a,-a)$

$E_3=(\xi,\tfrac{1}{2}-\xi;-\xi,-(\tfrac{1}{2}-\xi);x,-x),\quad E_4=(\tfrac{1}{2}-\xi,\xi;-(\tfrac{1}{2}-\xi),-\xi;-x,x)$

4. Wir haben in §5 gesehen, dass eine Algebra eine Peirce-Zerlegung in bezug auf ein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter $E_1,\dots,E_m$ zulässt, wenn dieses System die Eigenschaften (e) von §5.4 erfüllt:

(e)
1. $L(E_i)\circ L(E_j)=L(E_j)\circ L(E_i)$
2. $L(E_i)\circ L(E_j)=2L^2(E_i)\circ L(E_j)$ für $i\neq j$
3. $3L^2(E_i)-L(E_i)=2L^3(E_i)$
4. $L(E_i)\circ L(E_j)\circ L(E_k)=0$ für $i,j,k\neq$

Das vollständige Orthogonalsystem $E_1,\dots,E_m$ möge die Länge 2 haben, $m=2$, also $E_1+E_2=E$, $E_1\circ E_2=0$.
Die Bedingung 1. ist dann erfüllt, denn $L(E_1)\circ L(E-E_1)=L(E_1)-L^2(E_1)=$ $=L(E-E_1)\circ L(E_1)$.
Wir zeigen: Wenn 2. gilt, dann gilt auch 3. (4. entfällt).
Denn: $L(E-E_1)\circ L(E_1)=2L^2(E-E_1)\circ L(E_1)$ ist gleichwertig mit $L(E_1)-L^2(E_1)=2(L(E)-2L(E_1)+L^2(E_1))\circ L(E_1)$. Das ist gleichwertig mit $L(E_1)-L^2(E_1)=2L(E_1)-4L^2(E_1)+2L^3(E_1)$, daher $3L^2(E_1)-L(E_1)=2L^3(E_1)$.
Weiter gilt: $L(E-E_1)=3L^2(E-E_1)-2L^3(E-E_1)$ ist gleichwertig mit $L(E_1)=3L^2(E_1)-2L^3(E_1)$.
Denn: $L(E-E_1)=3L^2(E-E_1)-2L^3(E-E_1)$ ist gleichwertig mit

$$L(E)-L(E_1)=3L(E)-6L(E_1)+3L^2(E_1)-2L(E)+4L(E_1)-2L^2(E_1)+2L(E_1)-4L^2(E_1)+2L^3(E_1).$$

Das ist gleichwertig mit $-3L^2(E_1)+2L^3(E_1)=-L(E_1)$.
Wir haben:
Eine Algebra lässt eine Peirce-Zerlegung in bezug auf das vollständige Orthogonalsystem E_1,E_2 zu, wenn gilt: $3L^2(E_1)-L(E_1)=2L^3(E_1)$.

Das vollständige Orthogonalsystem $E_1,\dots,E_m$ möge die Länge 3 haben, $m=3$, also $E_1+E_2+E_3=E$, $E_i\circ E_j=0$, $i\neq j$.
Angenommen es gilt $L(E_1)\circ L(E_2)=L(E_2)\circ L(E_1)$.
Dann gilt auch $L(E_1)\circ L(E_3)=L(E_3)\circ L(E_1)$ und $L(E_2)\circ L(E_3)=L(E_3)\circ L(E_1)$.
Denn:

$$L(E_1)\circ L(E_3)=L(E_1)\circ(L(E)-L(E_1)-L(E_2))=L(E_1)-L^2(E_1)-L(E_1)\circ L(E_2),$$
$$L(E_3)\circ L(E_1)=(L(E)-L(E_1)-L(E_2))\circ L(E_1)=L(E_1)-L^2(E_1)-L(E_2)\circ L(E_1).$$

Ebenso zeigt man $L(E_2)\cdot L(E_3)=L(E_3)\cdot L(E_2)$.
Um die Eigenschaft 1. von (e) für ein System der Länge 3 nachzuweisen, genügt es also, diese für zwei Idempotente nachzuweisen.

Das vollständige Orthogonalsystem $E_1,\dots,E_m$ möge die Länge 4 haben, $m=4$, also $E_1+E_2+E_3+E_4=E$, $E_i\cdot E_j=0$, $i\neq j$.
Wir fragen, wann die Eigenschaft 1. von (e) gilt.
Da die Idempotente untereinander orthogonal sind, lässt sich das System auf verschiedene Weise aufspalten in vollständige Orthogonalsysteme der Länge 2. Für diese gilt die Eigenschaft 1.
Man erhält die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&L(E_i)\cdot L(E_j+E_k+E_m)=L(E_j+E_k+E_m)\cdot L(E_i) && i,j,k,m\neq \\
&L(E_i+E_j)\cdot L(E_k+E_m)=L(E_k+E_m)\cdot L(E_i+E_j) && i,j,k,m\in\{1,2,3,4\}
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Angenommen es gilt:
$L(E_1)\cdot L(E_2)=L(E_2)\cdot L(E_1)$, $L(E_1)\cdot L(E_3)=L(E_3)\cdot L(E_1)$ und
$L(E_2)\cdot L(E_3)=L(E_3)\cdot L(E_2)$.
Dann gilt Eigenschaft 1.
Der Beweis lässt sich sofort mit den Gleichungen (8.11) führen.
Wir haben:
Um die Eigenschaft 1. von (e) für ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 4 nachzuweisen, genügt es, diese für drei der sechs auftretenden Gleichungen nachzuweisen.

Wir gehen jetzt auf die Algebra $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ zurück. Wir haben die Idempotente von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{C}_8)$ und die zugehörigen vollständigen Orthogonalsysteme bestimmt. Da $\mathfrak{h}_4^{++}$ eine Jordan-Algebra ist, ist eine Peirce-Zerlegung bezüglich dieser Orthogonalsysteme möglich. Die Idempotente von $\mathfrak{h}_4^{++}$ sind aber auch Idempotente der Algebra $\mathfrak{h}_4^+$. Es erhebt sich die Frage, ob oder wann eine Peirce-Zerlegung bezüglich dieser Orthogonalsysteme in $\mathfrak{h}_4^+$ möglich ist, also, ob oder wann die Bedingungen 1.,2.,3.,4. von (e) erfüllt sind.
(e) ist gleichwertig mit

$$
(e')\quad
\begin{aligned}
&1'. && E_i\cdot(E_j\cdot X)=E_j\cdot(E_i\cdot X) \\
&2'. && E_i\cdot(E_j\cdot X)=2E_i\cdot(E_i\cdot(E_j\cdot X)) \quad i\neq j \\
&3'. && 3E_i\cdot(E_i\cdot X)-E_i\cdot X=2E_i\cdot(E_i\cdot(E_i\cdot X)) \\
&4'. && E_i\cdot(E_j\cdot(E_k\cdot X))=0 \quad i,j,k\neq \qquad \text{für alle } X\in\mathfrak{h}_4^+.
\end{aligned}
$$

Da sich jedes Element von $\mathfrak{h}_4^+$ eindeutig in der Form X_1+X_2 schreiben lässt mit $X_1\in\mathfrak{h}_4^{++}$, $X_2\in\mathfrak{h}_4^{+-}$, die Bedingungen (e') aber für alle $X_1\in\mathfrak{h}_4^{++}$ erfüllt sind, genügt es zu untersuchen, wann (e') für beliebiges $X\in\mathfrak{h}_4^{+-}$ erfüllt ist, also für ein X, das sich durch $X=(\beta_1,\beta_2;b_1',b_2';b_{12},b_{14})$ charakterisieren lässt.
Wir greifen zunächst die Systeme heraus, die, bis auf die konjugierten, nur eine Cayley-Grösse enthalten. Wegen der Matrizenmultiplikation und der Linearität der Gleichungen (e') in X treten nur Matrizen auf, deren Elemente aus Summanden der Form $[\alpha a'\dots a'xa'\dots a']$ bestehen, worin x ein Element der Matrix X, $\alpha\in K$ und $a'=a$ oder $a'=\bar{a}$ gilt; die eckigen Klammern sollen eine beliebige Klammerung anzeigen. Der Satz von Artin besagt, dass die von zwei Cayley-Grössen a,x erzeugte Teilalgebra von $\mathcal{C}_8$ assoziativ ist. Man kann also auf die Klammern verzichten. Mit den auftretenden Matrixelementen kann also assoziativ gerechnet werden. 1'. gilt daher offenbar genau dann, wenn $E_iE_jX=XE_iE_j$ gilt. Gilt dies, so aber auch 2'.,4'..3'. gilt trivial. Für Systeme der Länge 2 gilt $XE_iE_j=E_iE_jX$ offensichtlich und für das auftretende System der Länge 3 wegen $E_iE_j=0$.
Die Algebra $\mathfrak{h}_4^+$ lässt also eine Peirce-Zerlegung in bezug auf die folgenden vollständigen Orthogonalsysteme Idempotenter zu:

Länge 2: $E_1=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\pm\alpha,\pm(\frac{1}{2}-\alpha);a,\pm a)$, $E_2=E-E_1$

Länge 3: $E_1=(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2};0,0)$, $E_2=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\mp\alpha,\mp(\frac{1}{2}-\alpha);a,\mp a)$,
$E_3=(\frac{1}{2}-\alpha,\alpha;\mp(\frac{1}{2}-\alpha),\mp\alpha;-a\ \pm a)$.

Es bleiben die Systeme

Länge 2: $E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$, $E_2=E-E_1$

Länge 3: $E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$,
$E_2=\frac{1}{2}((1-\alpha-\alpha'),(\alpha+\alpha');(1-\alpha-\alpha'),(\alpha+\alpha');-(a_{12}+a_{14}),-(a_{12}+a_{14}))$,
$E_3=\frac{1}{2}((1-\alpha+\alpha'),(\alpha-\alpha');-(1-\alpha+\alpha'),-(\alpha-\alpha');-(a_{12}-a_{14}),(a_{12}-a_{14}))$

Länge 4: $E_1=(\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;\alpha,\frac{1}{2}-\alpha;a,a)$, $E_2=(\frac{1}{2}-\alpha,\alpha;\frac{1}{2}-\alpha,\alpha;-a,-a)$
$E_3=(\xi,\frac{1}{2}-\xi;-\xi,-(\frac{1}{2}-\xi);x,-x)$, $E_4=(\frac{1}{2}-\xi,\xi;-(\frac{1}{2}-\xi),-\xi;-x,x)$.

Wir wenden uns dem System der Länge 4 zu:
Wir untersuchen, wann 1'. von (e') für alle $X\in\mathfrak{h}_4^+$ erfüllt ist. Für

das Paar E_1,E_2, sowie E_3,E_4 ist 1'. erfüllt, da, bis auf die konjugierte, nur eine Cayley-Grösse auftritt. Es genügt daher für die Gültigkeit von 1'. zu zeigen, dass $E_1\circ(E_3\circ X)=E_3\circ(E_1\circ X)$ für alle $X\in\mathfrak{H}_4^{+-}$ gilt. (vgl. Bemerkung zu den obigen Systemen).
Sobald bei den Rechnungen mit einem Körperelement $\varkappa$ multipliziert wird, können keine Klammerungsprobleme auftreten, da auf Grund der Matrizenmultiplikation nur Summanden der Form εxy auftreten können. Wegen $E_1\circ(E_3\circ X)=(E_3\circ X)\circ E_1$ und $E_3\circ(E_1\circ X)=E_3\circ(X\circ E_1)$ treten auf beiden Seiten aber bis auf verschiedene Klammerungen dieselben Summanden auf, m.a.W. wir können annehmen, dass $\beta_1=\beta_2=0$ in X, $\alpha=0$ in E_1, $\xi=0$ in E_3 ist. Dann ergibt sich:

$$2E_1\circ X=(2\lambda(a\overline{b_{12}})+2\lambda(a\overline{b_{14}}),2\lambda(a\overline{b_{12}})-2\lambda(a\overline{b_{14}});\\ -(a\overline{b_{12}}-b_{12}\bar{a})-(a\overline{b_{14}}-b_{14}\bar{a}),-(\bar{a}b_{12}-\overline{b_{12}}a)+(\bar{a}b_{14}-\overline{b_{14}}a);\\ \tfrac{1}{2}b_{12}+\tfrac{1}{2}b_{14}-ab_2'+b_1'a,\tfrac{1}{2}b_{14}+\tfrac{1}{2}b_{12}+ab_2'+b_1'a)$$

$$2E_3\circ X=(2\lambda(x\overline{b_{12}})-2\lambda(x\overline{b_{14}}),2\lambda(x\overline{b_{12}})+2\lambda(x\overline{b_{14}});\\ (x\overline{b_{12}}-b_{12}\bar{x})-(x\overline{b_{14}}-b_{14}\bar{x}),(\bar{x}b_{12}-\overline{b_{12}}x)+(\bar{x}b_{14}-\overline{b_{14}}x);\\ \tfrac{1}{2}b_{12}-\tfrac{1}{2}b_{14}+xb_2'-b_1'x,\tfrac{1}{2}b_{14}-\tfrac{1}{2}b_{12}+xb_2'+b_1'x)$$

Bezeichnen wir $E_1\circ(E_3\circ X)-E_3\circ(E_1\circ X)$ als $D=(\delta_1,\delta_2;d_1',d_2';d_{12},d_{14})$, so ergibt sich:

$4\delta_1=4\lambda(\bar{a}xb_2')+4\lambda(\bar{x}ab_2')=4\lambda(\bar{a}xb_2')-4\lambda(\bar{a}xb_2')=0,$
$4\delta_2=-4\lambda(\bar{a}b_1'x)-4\lambda(\bar{x}b_1'a)=4\lambda(\bar{x}b_1'a)-4\lambda(\bar{x}b_1'a)=0,$
$4d_1'=2a(b_2'\bar{x})+2(xb_2')\bar{a}-2x(b_2'\bar{a})-2(ab_2')\bar{x}=2(a,b_2',\bar{x})-2(x,b_2',\bar{a})=4(x,b_2',a)$
wegen $\bar{x}=2\lambda(x)-x$, $\bar{a}=2\lambda(a)-a$ und $(\alpha,c_1,c_2)=0$ für $\alpha\in K, c_i\in\mathcal{C}_8$.
Die Rechnung für d_2' verläuft analog und liefert
$4d_2'=-4(x,b_1',a)$.

$$4d_{12}=(4\lambda(x\overline{b_{12}})a-a(\bar{x}b_{12})+a(\overline{b_{12}}x)+(x\overline{b_{12}})a-(b_{12}\bar{x})a-a(\bar{x}b_{14})+a(\overline{b_{14}}x)-\\ -(x\overline{b_{14}})a+(b_{14}\bar{x})a-\\ -4\lambda(a\overline{b_{12}})x-x(\bar{a}b_{12})+x(\overline{b_{12}}a)+x(\bar{a}b_{14})-x(\overline{b_{14}}a)+(a\overline{b_{12}})x-(b_{12}\bar{a})x+\\ +(a\overline{b_{14}})x-(b_{14}\bar{a})x)=\\ =(2(a,\overline{b_{12}},x)-2(x,\overline{b_{12}},a)+(a,\overline{b_{14}},x)+(x,\overline{b_{14}},a)+\\ +x(\bar{a}b_{14})-(b_{14}\bar{a})x+a(\bar{x}b_{14})-(b_{14}\bar{x})a)=\\ =(-4(x,\overline{b_{12}},a)-(x,\bar{a},b_{14})-(b_{14},\bar{a},x)-(a,\bar{x},b_{14})-(b_{14},\bar{x},a)+\\ +2\lambda(a\bar{x})b_{14}-2\lambda(x\bar{a})b_{14})=\\ =-4(x,\overline{b_{12}},a).$$

Die Rechnung für d_{14} verläuft analog und liefert
$4d_{14}=4(x,\overline{b_{14}},a)$.

Da b_{12},b_{14} beliebig aus $\mathcal{C}_8$ waren, b_1',b_2' beliebig aus $K^\perp$, $\mathcal{C}_8=K\oplus K^\perp$, gilt somit:
Das Idempotentensystem E_1,E_2,E_3,E_4 befriedigt die Gleichung 1'. aus (e') genau dann, wenn für die Elemente a,x gilt $(a,b,x)=0$ für alle $b\in\mathcal{C}_8$.
Eine Cayley-Algebra ist durch den Satz von Artin charakterisiert, der besagt, dass je zwei Cayley-Grössen eine assoziative Teilalgebra von $\mathcal{C}_8$ erzeugen. Daher gilt $(a,b,x)=0$ für alle $b\in\mathcal{C}_8$ genau dann, wenn a,x in der von einem Element $d\in\mathcal{C}_8$ erzeugten Teilalgebra K[d] liegen, daher $a=\sum_{i=0}^{r}\varepsilon_i d^i$, $x=\sum_{i=0}^{s}\eta_i d^i$, $\varepsilon_i,\eta_i\in K$.
Schliesslich gilt wegen der Randbedingungen für die Idempotente E_i
$\mu(a)=\alpha(\frac{1}{2}-\alpha)$, $\mu(x)=\xi(\frac{1}{2}-\xi)$.
Die in dem Idempotentensystem E_1,E_2,E_3,E_4, das der Bedingung 1'. genügt, auftretenden Cayley-Grössen liegen somit alle in K[d], in den Rechnungen für 2'., 3'., 4'. von (e') treten daher nur Summanden auf, die aus Produkten von höchstens zwei verschiedenen Cayley-Grössen bestehen. Es kann daher auf Klammern verzichtet werdem. Daher gilt auch 2'. und 3'. und 4'. (vgl. Bemerkung zu den Systemen auf S.65).

Wir wenden uns nun dem Idempotentensystem der Länge 3 zu:
Da es sich um ein vollständiges Orthogonalsystem der Länge 3 handelt, genügt es genau dann der Bedingung 1'., wenn $E_2\circ(E_3\circ X)=E_3\circ(E_2\circ X)$ gilt. Da E_2,E_3 vom Typ I_2 sind, gilt diese Beziehung genau dann, wenn $a_{12}-a_{14}$ und $a_{12}+a_{14}$ beide in einer von einem Element d erzeugten Teilalgebra von $\mathcal{C}_8$ liegen.
Etwa $a_{12}-a_{14}=\sum_{i=0}^{r}\varepsilon_i d^i$, $a_{12}+a_{14}=\sum_{i=0}^{s}\eta_i d^i$.
Daher $a_{12}=\frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{r}\varepsilon_i d^i+\sum_{i=0}^{s}\eta_i d^i)=\sum_{i=0}^{t}\varkappa_i d^i$, $a_{14}=\frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{s}\eta_i d^i-\sum_{i=0}^{r}\varepsilon_i d^i)=\sum_{i=0}^{n}\varkappa_i' d^i$,
also gilt $E_2\circ(E_3\circ X)=E_3\circ(E_2\circ X)$ genau dann, wenn sowohl a_{12} als auch a_{14} in K[d] liegen.
In den Rechnungen zu 2'., 3'., 4'. treten wiederum nur Summanden auf, die aus Produkten von zwei Cayley-Grössen bestehen.

Wir wenden uns schliesslich dem Idempotentensystem der Länge 2 zu:
Da $E_2=E-E_1$ ist, folgt sofort 1'.
Nach unseren Vorüberlegungen lässt sich $\mathfrak{H}_4^{+}$ in bezug auf das System $E_1=(\alpha,1-\alpha;\alpha',-\alpha';a_{12},a_{14})$, $E_2=E-E_1$ genau dann nach Peirce zerlegen, wenn 3'. für E_1 erfüllt ist:

$3E_1\circ(E_1\circ X)-E_1\circ X=2E_1\circ(E_1\circ(E_1\circ X))$ für beliebiges $X\in\mathfrak{H}_4^{+-}$.
Wir haben gesehen, dass die Idempotenten vom Typ I_4 sich jeweils zerlegen lassen in eine Summe von zwei zueinander orthogonalen Idempotenten vom Typ I_2.

$$E_1=E_1'+E_1'' \text{ mit } E_1'=\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha',1-\alpha-\alpha';\alpha+\alpha',1-\alpha-\alpha';a_{12}+a_{14},a_{12}+a_{14}),$$
$$E_1''=\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha',1-\alpha+\alpha';-(\alpha-\alpha'),-(1-\alpha+\alpha');a_{12}-a_{14},-(a_{12}-a_{14}))$$
$$E_2=E_2'+E_2'' \text{ mit } E_2'=\tfrac{1}{2}(1-\alpha-\alpha',\alpha+\alpha';1-\alpha-\alpha',\alpha+\alpha';-(a_{12}+a_{14}),-(a_{12}+a_{14}))$$
$$E_2''=\tfrac{1}{2}(1-\alpha+\alpha',\alpha-\alpha';-(1-\alpha+\alpha'),-(\alpha-\alpha');-(a_{12}-a_{14}),a_{12}-a_{14})$$

Wir haben somit ein spezielles System von Idempotenten vom Typ I_2 und haben gesehen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen sich $\mathfrak{H}_4^{+}$ nach Peirce bezüglich E_1',E_1'',E_2',E_2'' zerlegen lässt.
Angenommen $\mathfrak{H}_4^{+}$ lässt sich bezüglich E_1',E_1'',E_2',E_2'' nach Peirce zerlegen. Dann lässt sich $\mathfrak{H}_4^{+}$ auch bezüglich E_1,E_2 nach Peirce zerlegen.
Denn:
Es gilt $3E_1'\circ(E_1'\circ X)-E_1'\circ X=2E_1'\circ(E_1'\circ(E_1'\circ X))$ und
$3E_1''\circ(E_1''\circ X)-E_1''\circ X=2E_1''\circ(E_1''\circ(E_1''\circ X))$
wegen 3. für E_1',E_1'',E_2',E_2'' und
$E_1'\circ(E_1''\circ X)=2E_1'\circ(E_1'\circ(E_1''\circ X))$, sowie $E_1''\circ(E_1'\circ X)=2E_1''\circ(E_1''\circ(E_1'\circ X))$ wegen 2. für E_1',E_1'',E_2',E_2'', schliesslich $E_1'\circ(E_1''\circ X)=E_1''\circ(E_1'\circ X)$ für alle $X\in\mathfrak{H}_4^{+-}$ wegen 1. für E_1',E_1'',E_2',E_2''. Somit

$$\begin{array}{l}3E_1'\circ(E_1''X)+3E_1''\circ(E_1'\circ X)=6E_1'\circ(E_1'\circ(E_1''X))+6E_1''\circ(E_1''\circ(E_1'\circ X))\\ \underline{3E_1'\circ(E_1'\circ X)+3E_1''\circ(E_1''X)-E_1'\circ X-E_1''X \;=2E_1'\circ(E_1'\circ(E_1'\circ X))+2E_1''\circ(E_1''\circ(E_1''X))}\\ 3E_1\circ(E_1\circ X)-E_1\circ X \;=\; 2E_1\circ(E_1\circ(E_1\circ X))\end{array}$$

Also:
Gelten die Eigenschaften 1.,2.,3. für das System E_1',E_1'',E_2',E_2'', so auch für das System E_1,E_2.
Die Eigenschaften 1.,2.,3. gelten aber für E_1',E_2',E_1'',E_2'' genau dann, wenn E_1' und E_2'' vertauschbar sind, also wenn $a_{12}+a_{14}$ und $-(a_{12}-a_{14})$ in der von einer Cayley-Grösse d erzeugten Teilalgebra K[d] liegen, also, wie oben gezeigt, wenn sowohl a_{12}, als auch a_{14} in K[d] liegen.
Diese Bedingung ist also hinreichend für die Zerlegbarkeit bezüglich E_1,E_2. Um zu zeigen, dass sie auch notwendig ist, müssen wir $D=(\delta_1,\delta_2;d_1',d_2';d_{12},d_{14})=-3E_1\circ(E_1\circ X)+E_1\circ X+2E_1\circ(E_1\circ(E_1\circ X))$ näher betrachten.

Für $X\in\mathfrak{H}_4^{++}$ ist $D=(0,0;0,0;0,0)$.
Es sei $X\in\mathfrak{H}_4^{++}$, etwa $X=(\beta_1,\beta_2;\beta_1',\beta_2';b_{12},b_{14})$, dagegen
$X\in\mathfrak{H}_4^{+-}$, etwa $X=(\beta_1,\beta_2;b_1',b_2';b_{12},b_{14})$, $\beta_i'\in K$, $b_i'\in K^{\perp}$, $b_{ij}\in\mathfrak{C}_8$.
Für $X\in\mathfrak{H}_4^{++}$ wird $E_1\circ X$ bestimmt durch

$$2E_1\circ X=D=\begin{cases}\delta_1=2\alpha\beta_1+2\alpha'\beta_1'+2\lambda(a_{12}\overline{b_{12}})+2\lambda(a_{14}\overline{b_{14}})\\ \delta_2=2(1-\alpha)\beta_2-2\alpha'\beta_2'+2\lambda(a_{12}\overline{b_{12}})+2\lambda(a_{14}\overline{b_{14}})\\ \delta_1'=2\alpha\beta_1'+2\alpha'\beta_1+2\lambda(a_{12}\overline{b_{14}})+2\lambda(a_{14}\overline{b_{12}})\\ \delta_2'=2(1-\alpha)\beta_2'-2\alpha'\beta_2+2\lambda(a_{12}\overline{b_{14}})+2\lambda(a_{14}\overline{b_{12}})\\ d_{12}=b_{12}+(\beta_1+\beta_2)a_{12}+(\beta_1'+\beta_2')a_{14}\\ d_{14}=b_{14}+(\beta_1+\beta_2)a_{14}+(\beta_1'+\beta_2')a_{12}\end{cases}$$

Für $X\in\mathfrak{H}_4^{+-}$ wird $E_1\circ X$ bestimmt durch

$$2E_1\circ X=D=\begin{cases}\delta_1=2\alpha\beta_1+2\lambda(a_{12}\overline{b_{12}})+2\lambda(a_{14}\overline{b_{14}})\\ \delta_2=2(1-\alpha)\beta_2+2\lambda(a_{12}\overline{b_{12}})-2\lambda(a_{14}\overline{b_{14}})\\ d_1'=2\alpha b_1'-a_{12}\overline{b_{14}}+b_{14}\overline{a_{12}}-a_{14}\overline{b_{12}}+b_{12}\overline{a_{14}}\\ d_2'=2(1-\alpha)b_2'+\overline{a_{12}}b_{14}-\overline{b_{14}}a_{12}-\overline{a_{14}}b_{12}+\overline{b_{12}}a_{14}\\ d_{12}=b_{12}+(\beta_1+\beta_2)a_{12}-2\alpha' b_{14}-a_{14}b_2'+b_1'a_{14}\\ d_{14}=b_{14}+(\beta_1-\beta_2)a_{14}-2\alpha' b_{12}+a_{12}b_2'+b_1'a_{12}\end{cases}$$

Ein Vergleich zeigt, dass in $\mathfrak{H}_4^{+-}$ wesentlich andere Rechnungen gegenüber $\mathfrak{H}_4^{++}$ in den Positionen (i,i) von D, also in δ_i nicht auftreten werden. Wir können zur Vereinfachung der Rechnung annehmen, dass $\beta_1=\beta_2=0$ ist. Wir berechnen für $X\in\mathfrak{H}_4^{+-}$ das Element d_{12} der Matrix $D=-3E_1\circ(E_1\circ X)+E_1\circ X+2E_1\circ(E_1\circ(E_1\circ X))$

$$\begin{aligned}d_{12}=(&\tfrac{1}{4}b_{12}-3\alpha^2b_{12}+\tfrac{3}{2}\mu(a_{14})b_{12}+3\lambda(a_{12}\overline{b_{12}})a_{12}+2\alpha\lambda(a_{14}\overline{b_{14}})a_{12}-\lambda(a_{14}\overline{b_{14}})a_{12}-2\alpha'\lambda(a_{12}\overline{b_{14}})a_{14}+\\ &+\lambda(b_1'a_{14}\overline{a_{12}})a_{12}-\lambda(a_{14}b_2'\overline{a_{12}})a_{12}-\tfrac{3}{2}\alpha'b_{14}-2\alpha'^2b_{14}-\alpha'\mu(a_{12})b_{14}-\alpha'\mu(a_{14})b_{14}-2\alpha'\lambda(a_{14}\overline{b_{14}})a_{14}-\\ &-\tfrac{7}{4}a_{14}b_2'+\tfrac{5}{2}\alpha a_{14}b_2'-\alpha^2a_{14}b_2'-\alpha'^2a_{14}b_2'-\tfrac{1}{2}\mu(a_{12})a_{14}b_2'-\mu(a_{14})a_{14}b_2'+\tfrac{1}{4}b_1'a_{14}+\tfrac{1}{2}\alpha b_1'a_{14}+\\ &+\alpha^2b_1'a_{14}+\alpha'^2b_1'a_{14}+\tfrac{1}{2}\mu(a_{12})b_1'a_{14}+\mu(a_{14})b_1'a_{14}-2\alpha'a_{12}b_2'+\alpha\alpha'a_{12}b_2'-\alpha'b_1'a_{12}-\alpha\alpha'b_1'a_{12}+\\ &+\tfrac{3}{2}a_{14}\overline{b_{14}}a_{14}+\alpha'a_{14}\overline{b_{14}}a_{14}+\alpha'a_{12}\overline{b_{14}}a_{12}+\tfrac{1}{2}(a_{12}b_2'\overline{a_{12}})a_{14}-\tfrac{1}{2}a_{14}(\overline{a_{12}}b_1'a_{12})-a_{14}(\overline{a_{12}}b_{14})+\\ &+a_{14}(\overline{b_{14}}a_{12})+\tfrac{1}{2}\alpha a_{14}(\overline{a_{12}}b_{14})-\tfrac{1}{2}\alpha a_{14}(\overline{b_{14}}a_{12})+\tfrac{1}{2}\alpha'a_{14}(\overline{a_{12}}b_{12})-\tfrac{1}{2}\alpha'a_{14}(\overline{b_{12}}a_{12})-\tfrac{1}{2}(a_{12}\overline{b_{14}})a_{14}+\\ &+\tfrac{1}{2}(b_{14}\overline{a_{12}})a_{14}-\tfrac{1}{2}\alpha(a_{12}\overline{b_{14}})a_{14}+\tfrac{1}{2}\alpha(b_{14}\overline{a_{12}})a_{14}+\tfrac{1}{2}\alpha'a_{12}(\overline{a_{14}}b_{12})-\tfrac{1}{2}\alpha'a_{12}(\overline{b_{12}}a_{14})+\tfrac{1}{2}\alpha'(a_{14}\overline{b_{12}})a_{12}-\\ &-\tfrac{1}{2}\alpha'(b_{12}\overline{a_{14}})a_{12}+\tfrac{1}{2}\alpha'(a_{12}\overline{b_{12}})a_{14}-\tfrac{1}{2}\alpha'(b_{12}\overline{a_{12}})a_{14})-\\ -(&\tfrac{3}{4}b_{12}+3\alpha^2b_{12}+\tfrac{3}{2}\mu(a_{14})b_{12}+3\lambda(a_{12}\overline{b_{12}})a_{12}-3\alpha'b_{14}+\tfrac{3}{4}b_1'a_{14}+\tfrac{3}{2}\alpha b_1'a_{14}-\tfrac{9}{4}a_{14}b_2'+\tfrac{3}{2}\alpha a_{14}b_2'-\\ &-\tfrac{3}{2}\alpha'a_{12}b_2'-\tfrac{3}{2}\alpha'b_1'a_{12}-\tfrac{3}{4}a_{14}(\overline{a_{12}}b_{12})+\tfrac{3}{4}a_{14}(\overline{b_{14}}a_{12})-\tfrac{3}{2}a_{14}\overline{b_{14}}a_{14}-\tfrac{3}{4}(a_{12}\overline{b_{14}})a_{14}+\tfrac{3}{4}(b_{12}\overline{a_{12}})a_{14})+\\ +(&\tfrac{1}{2}b_{12}-\alpha'b_{14}-\tfrac{1}{2}a_{14}b_2'+\tfrac{1}{2}b_1'a_{14})\end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen für E_1: $\mu(a_{12})+\mu(a_{14})=\alpha-\alpha^2-\alpha'^2$, $2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})=\alpha'-2\alpha\alpha'$ ergeben sich die folgenden Beziehungen:

1. $\alpha a_{14}b_2' - \alpha^2 a_{14} b_2' - \alpha'^2 a_{14} b_2' - \mu(a_{14})a_{14}b_2' - \mu(a_{12})a_{14}b_2' = 0$
2. $-\alpha b_1' a_{14} + \alpha^2 b_1' a_{14} + \alpha'^2 b_1' a_{14} + \mu(a_{14}) b_1' a_{14} + \mu(a_{12}) b_1' a_{14} = 0$
3. $-\frac{1}{2}\alpha' a_{12} b_2' + \alpha\alpha' a_{12} b_2' = -\lambda(a_{12}\overline{a_{14}}) a_{12} b_2'$
4. $\frac{1}{2}\alpha' b_1' a_{12} - \alpha\alpha' b_1' a_{12} = \lambda(a_{12}\overline{a_{14}}) b_1' a_{12}$
5. $-2\alpha'(\mu(a_{12})+\mu(a_{14}))b_{14} = (2\alpha^2\alpha' b_{14} - \alpha\alpha' b_{14}) + (\frac{1}{2}\alpha' b_{14} - \alpha\alpha' b_{14}) - \frac{1}{2}\alpha' b_{14} =$
$= \lambda(a_{12}\overline{a_{14}}) b_{14} - 2\alpha\lambda(a_{12}\overline{a_{14}}) b_{14} - \frac{1}{2}\alpha' b_{14}$.

Damit bleibt:

$$\begin{aligned} d_{12} = {} & \tfrac{1}{2}(\alpha - \tfrac{1}{2})((a_{14}\overline{b_{14}})a_{12} - a_{14}(\overline{b_{14}}a_{12}) + (b_{14}\overline{a_{14}})a_{12} - b_{14}(\overline{a_{14}}a_{12}) + (b_{14}\overline{a_{12}})a_{14} - b_{14}(\overline{a_{12}}a_{14}) + \\ & + a_{12}(\overline{b_{14}}a_{14}) - (a_{12}\overline{b_{14}})a_{14} + a_{12}(\overline{a_{14}}b_{14}) - (a_{12}\overline{a_{14}})b_{14} + a_{14}(\overline{a_{12}}b_{14}) - (a_{14}\overline{a_{12}})b_{14}) + \\ & + \tfrac{1}{2}\alpha'((a_{14}\overline{b_{12}})a_{12} - a_{14}(\overline{b_{12}}a_{12}) + (a_{12}\overline{b_{12}})a_{14} - a_{12}(\overline{b_{12}}a_{14})) + \\ & + \tfrac{1}{2}\alpha'(a_{14}(\overline{a_{12}}b_{12}) + a_{12}(\overline{a_{14}}b_{12}) - (b_{12}\overline{a_{14}})a_{12} - (b_{12}\overline{a_{12}})a_{14}) + \\ & + \tfrac{1}{2}((a_{12}(b_2'\overline{a_{14}}))a_{12} - (a_{14}b_2')\mu(a_{12}) + \mu(a_{14})a_{14}b_2' + (a_{12}b_2'\overline{a_{12}})a_{14} - \\ & - (a_{12}b_2')(\overline{a_{12}}a_{14}) - (a_{12}b_2')(\overline{a_{14}}a_{12})) + \\ & + \tfrac{1}{2}(\mu(a_{12})b_1' a_{14} - a_{12}(\overline{a_{14}}b_1')a_{12} - \mu(a_{12})b_1' a_{14} - a_{14}(\overline{a_{12}}b_1' a_{12}) + \\ & + (a_{12}\overline{a_{14}})(b_1' a_{12}) + (\overline{a_{14}}a_{12})(b_1' a_{12})) \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} d_{12} = {} & \tfrac{1}{2}(\alpha - \tfrac{1}{2})((a_{14},\overline{b_{14}},a_{12}) + (b_{14},\overline{a_{14}},a_{12}) + (b_{14},\overline{a_{12}},a_{14}) + (a_{12},\overline{b_{14}},a_{14}) + \\ & + (a_{12},\overline{a_{14}},b_{14}) + (a_{14},\overline{a_{12}},b_{14})) + \tfrac{1}{2}\alpha'((a_{14},\overline{b_{12}},a_{12}) + (a_{12},\overline{b_{12}},a_{14})) + \\ & + \tfrac{1}{2}\alpha'(a_{14}(\overline{a_{12}}b_{12}) - (a_{14}\overline{a_{12}})b_{12} + (a_{14}\overline{a_{12}})b_{12} + a_{12}(\overline{a_{14}}b_{12}) - (a_{12}\overline{a_{14}})b_{12} + (a_{12}\overline{a_{14}})b_{12} - \\ & - (b_{12}\overline{a_{14}})a_{12} + b_{12}(\overline{a_{14}}a_{12}) - b_{12}(\overline{a_{14}}a_{12}) - (b_{12}\overline{a_{12}})a_{14} + b_{12}(\overline{a_{12}}a_{14}) - b_{12}(\overline{a_{12}}a_{14})) + \\ & + \tfrac{1}{2}((a_{12}b_2'\overline{a_{12}})a_{14} - (a_{12}b_2')(\overline{a_{12}}a_{14}) - a_{14}(\overline{a_{12}}b_1' a_{12}) + (a_{14}\overline{a_{12}})(b_1' a_{12})) = \\ = {} & 0 + \tfrac{1}{2}\alpha'(-(a_{14},\overline{a_{12}},b_{12}) - (a_{12},\overline{a_{14}},b_{12}) - (b_{12},\overline{a_{14}},a_{12}) - (b_{12},\overline{a_{12}},a_{14}) + \\ & + 2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})b_{12} - 2\lambda(a_{12}\overline{a_{14}})b_{12}) + \tfrac{1}{2}((a_{12}b_2',\overline{a_{12}},a_{14}) - (a_{14},\overline{a_{12}},b_1' a_{12})) = \\ = {} & 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(a_{12}b_2' - b_1' a_{12},\overline{a_{12}},a_{14}) = \tfrac{1}{2}(b_1' a_{12} - a_{12}b_2',a_{12},a_{14}) \ . \end{aligned}$$

Da b_1', b_2' beliebig aus $K^{\perp}$ ($\mathcal{C}_8 = K \bullet K^{\perp}$), ist $d_{12} = 0$, falls a_{12} und a_{14} beide in der von einem Element d erzeugten Teilalgebra K[d] liegen. Die Bedingung $a_{12}, a_{14} \in K[d]$ ist also notwendig und hinreichend.

Insgesamt haben wir bewiesen

Satz 8.5: Die Algebra $\mathfrak{h}_4^+(\mathcal{C}_8)$ ist genau dann in bezug auf ein vollständiges Orthogonalsystem Idempotenter von $\mathfrak{h}_4^{++}(\mathcal{C}_8)$, $E_1, E_2, \dots, E_{m^2}$ nach Peirce zerlegbar, wenn alle in den E_i auftretenden Cayley-Grössen in der von einer Cayley-Grösse d erzeugten Teilalgebra K[d] von $\mathcal{C}_8$ liegen.

Literatur

[1] A.A.Albert: Power associative rings, Trans.Amer.Math.Soc. 64 (1948) S. 552-593

[2] A.A.Albert: A theory of trace-admissible algebras, Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A. 35 (1949) S. 317-322

[3] A.A.Albert, N.Jacobson: On reduced exceptional simple Jordan algebras, Ann.of Math. 66 (1957) S.400-417

[4] E.Artin: Geometric algebra, New York (1957)

[5] F.van der Blij; T.A.Springer: The arithmetics of octaves and of the group G_2, Kon.Ned.Akad.van Wet.,Indag.XXI (1959) S. 406-418

[6] H.Braun, M.Koecher: Jordan-Algebren Berlin, Heidelberg, New York (1966)

[7] H.J.Höhnke: Über spurenverträgliche Algebren, Publ.Math.,Debrecen 9 (1962) S. 122-134

[8] N.Jacobson: Structure of alternative and Jordan bimodules, Osaka Math.J. 6 (1954) S. 1-71

[9] N.Jacobson: Cayley numbers and normal simple Lie algebras of type G, Duke Math.J. 5 (1939) S.775-783

[10] R.H.Oehmke: On flexible algebras, Ann.of Math. 68 (1958) S. 221-230

[11] A.A.Sagle: Malcev algebras, Trans.Amer.Math.Soc. 101 (1961) S. 426-458

[12] R.D.Schafer: The exceptional simple Jordan algebras, Amer.J.Math. 70 (1948) S. 82-94

[13] T.A.Springer: On a class of Jordan algebras, Kon.Ned.Akad.van Wet.,Indag.XXI (1959) S.254-264

[14] T.A.Springer: The classification of reduced exceptional simple Jordan algebras,
Kon.Ned.Akad.van Wet.,Indag.XXII (1960) S. 414-422

[15] J.L.Zemmer: Some $\mathcal{g}$ division algebras,
Canad.J.Math. 11 (1959) S. 51-58

[16] M.Zorn: Alternativkörper und quadratische Systeme,
Abh.Math.Sem.Hamb.Univ. 9 (1933) S. 395-402

Lebenslauf

Am 8.Dezember 1939 wurde ich, Horst Rühaak, als Sohn des Lehrers Theodor Rühaak und seiner Ehefrau Ada, geborene Gollücke, in Hamburg geboren.
Ich bestand am 2.März 1959 das Abitur an der Peter-Petersen-Schule in Hamburg-Wellingsbüttel, die ich vom ersten bis zum dreizehnten Schuljahr besuchte.
Im Sommersemester 1959 begann ich an der Universität Hamburg mit dem Studium, mit dem ersten Fach Mathematik.
Ich befasste mich ausser mit Mathematik mit Physik, Philosophie und Pädagogik.
Im Juni 1963 bestand ich die Prüfung in Philosophie und Pädagogik, im Januar 1966 die Wissenschaftliche Prüfung für das Lehramt an Gymnasien, in den Fächern Mathematik und Physik.
In meinem ersten Fach Mathematik besuchte ich an der Universität Hamburg Vorlesungen und Seminare bei Frau Professor Braun und den Herren Professoren Artin, Collatz, Hasse, Karzel, Leptin, Meyer und Sperner.

Hamburg, im Juni 1968

Horst Rühaak