МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО
И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НИИ МАТЕМАТИКО-ИНФОРМАЦИОННЫХ ОСНОВ ОБУЧЕНИЯ

Препринт № 23

Сверчков С.Р.

ПРИМЕРЫ НЕСПЕЦИАЛЬНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР БЕРНШТЕЙНА

Министерство общего и профессионального
образования Российской Федерации
Новосибирский государственный университет
НИИ Математико-информационных основ обучения

Препринт №23

С.Р. Сверчков

ПРИМЕРЫ НЕСПЕЦИАЛЬНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР БЕРНШТЕЙНА

Новосибирск 1997

14Б(03)

С.Р. Сверчков

ПРИМЕРЫ НЕСПЕЦИАЛЬНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР БЕРНШТЕЙНА

Препринт №23, 39 с., 1997

УДК 512.554.38

ПРИМЕРЫ НЕСПЕЦИАЛЬНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР БЕРНШТЕЙНА

С.Р. СВЕРЧКОВ

Введение. Напомним, что алгеброй Бернштейна над полем F называется коммутативная алгебра B, на которой определен ненулевой гомоморфизм ω: $B \to F$, удовлетворяющий тождеству

$$x^2 \cdot x^2 = \omega(x)^2 x^2 .$$

Такие алгебры были введены П. Холгейтом [1]. Известно [2], что B можно представить в виде

$$B = Fe \oplus N,$$

где $N = \ker\omega$ и e – идемпотент, причем

$$n^2 \cdot n^2 = 0,$$

для всех $n \in N$. Если $ch(F) \neq 2$, то

$$N = U \oplus Z,$$

где

$$U = \left\{u \in N / e \cdot u = \frac{1}{2}u\right\}, \quad Z = \{z \in N / e \cdot z = 0\}.$$

Впервые йордановы алгебры Бернштейна возникли в работе П. Холгейта [3], где он доказал, что генетические алгебры для простой наследственности Менделя, являются специальными йордановыми алгебрами. Позднее, этот результат был обобщен А. Верз-Бюсекрос [4], а именно, было доказано, что конечномерные алгебры Бернштейна с нулевым умножением в N, являются специальными йордановыми алгебрами. В этой же работе были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебра Бернштейна была йордановой. Отметим также, что введенные Ю. Любичем нормальные алгебры Бернштейна, являются йордановыми [5].

Вопрос о существовании неспециальных йордановых алгебр Бернштейна до настоящего времени оставался открытым. В настоящей работе будут построены примеры неспециальных йордановых алгебр Бернштейна. Для этого будет найдено одно специальное тождество.

В работе Е. Зельманова, В. Скосырского [6] была решена проблема Ширшова о разрешимости йордановой ниль-алгебры ограниченного индекса в случае специальных алгебр. Важное место в этом доказательстве имеет следующий результат.

Пусть $A = A[X]$ – свободная ассоциативная алгебра со слабым йордановым тождеством $x^n = 0$ и $S = S[X]$ – подалгебра $A[X]^{(+)}$, порожденная множеством X.

Тогда

$$\left\{a^{n-1}b^{n-1}c^2d\right\} = j(a,b,c,d), \qquad (1)$$

где $a, b, c, d \in S[x]$ и $j(x, y, z, t)$ – йордановый многочлен от x, y, z, t. Тождество вида (1) назовем тождеством Зельманова-Скосырского степени n, или коротко ЗС-тождеством.

В п. 1 мы найдем ЗС-тождество степени 3 в явном виде. Используя это тождество будут построены неспециальные алгебры Бернштейна.

В п. 2 будет построена неспециальная йорданова алгебра Бернштейна $B = Fe \oplus U \oplus Z$, которая порождается только множеством U.

В п. 3 будет построена неспециальная йорданова алгебра Бернштейна, у которой ядро $N = U \oplus Z$ является специальной йордановой алгеброй. Этот пример дает ответ на вопрос И. Шестакова, о существовании неспециальных идемпотентных расширений специальных йордановых алгебр.

В п. 4 будет найден точный индекс нильпотентности квадрата йордановой ниль-индекса 3 алгебры. Этот результат напрямую связан с известной проблемой нильпотентности или разрешимости ядра произвольной алгебры Бернштейна. Он изучался во многих работах [6–13]. Вопрос нильпотентности ядра естественным образом связан с генетичностью алгебры B. А именно, B – генетическая алгебра тогда и только тогда, когда N – нильпотентная алгебра [7]. В работе [14] было доказано, что N^2 нильпотентна индекса 9 и N – разрешима индекса 4. Основным результатом в этом доказательстве является нахождение индекса нильпотентности квадрата произвольной йордановой ниль-индекса 3 алгебры. Который был найден с помощью компьютера. Использование ЗС-тождества позволит получить прямое решение этой проблемы.

Всюду ниже, предполагается, что поле F содержит $\frac{1}{6}$. Алгебры Бернштейна будем обозначать через B-алгебры, йордановы B-алгебры через JB-алгебры. Стандартные определения и обозначения можно найти в [15].

1. ЗС-тождество степени 3.

Пусть J – произвольная ниль-индекса 3 йорданова алгебра. Легко проверить, что в J выполнены следующие тождества и R-тождества:

$$\left\{R_aR_bR_c\right\} + \left\{R_bR_cR_a\right\} + \left\{R_cR_aR_b\right\} = 0, \qquad (2)$$

$$x \cdot y \cdot z \cdot y = \frac{1}{2}x \cdot y^2 \cdot z + \frac{1}{2}x \cdot z \cdot y^2 = -\frac{1}{2}y^2 \cdot z \cdot x, \qquad (3)$$

$$R_aR_{b\cdot c} + R_bR_{a\cdot c} + R_cR_{a\cdot b} = 0, \qquad (4)$$

$$x \cdot a \cdot c^2 \cdot a - x \cdot c \cdot a^2 \cdot c = 0. \qquad (5)$$

Предложение 1. В алгебре J выполнены следующие тождества:

$$8x \cdot a \cdot b \cdot c \cdot b \cdot (a \cdot c) = -x \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c - 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a, \qquad (6)$$

$$4x \cdot c \cdot a \cdot b^2 \cdot (a \cdot c) = x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a - 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c, \qquad (7)$$

$$8x \cdot c \cdot a \cdot b \cdot c \cdot (a \cdot b) = x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 + x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a -$$

$$-2x \cdot b \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b - 2(x \cdot c)D_{a^2,b^2} \cdot c, \qquad (8)$$

$$8\big(x \cdot a \cdot b \cdot c \cdot b \cdot (a \cdot c) - x \cdot c \cdot a \cdot b \cdot c \cdot (a \cdot b) - xa \cdot c \cdot b \cdot c \cdot (a \cdot b) + x \cdot b \cdot a \cdot c \cdot b \cdot (c \cdot a)\big) =$$

$$= \varepsilon\left(2x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 4(x \cdot a)D_{b^2,c^2} \cdot a\right), \qquad (9)$$

где

$$\varepsilon f(a,a,b,b,c,c) = f(a,a,b,b,c,c) + f(b,b,c,c,a,a) + f(c,c,a,a,b,b).$$

Доказательство. Имеем

$$8x \cdot a \cdot b \cdot c \cdot b \cdot (a \cdot c) \underset{(3)}{=} 4x \cdot a \cdot b^2 \cdot c \cdot (a \cdot c) + 4x \cdot a \cdot c \cdot b^2 \cdot (a \cdot c) \underset{(4)}{=}$$

$$\underset{(4)}{=} -2x \cdot a \cdot b^2 \cdot a \cdot c^2 - 4x \cdot a \cdot c \cdot a \cdot \left(b^2 \cdot c\right) - 4x \cdot a \cdot c \cdot c \cdot \left(a \cdot b^2\right) \underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=} -x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 - x \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 - 2x \cdot a^2 \cdot c \cdot \left(b^2 \cdot c\right) - 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot \left(b^2 \cdot c\right) + 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot \left(a \cdot b^2\right) \underset{(4)}{=}$$

$$\underset{(4)}{=} -x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 - x \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 + x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 + 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot c \cdot b^2 +$$

$$+2x \cdot c \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c - 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot a \cdot b^2 - 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a \underset{(5)}{=}$$

$$\underset{(5)}{=} -x \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot c + 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c - 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a,$$

т.е. тождество (6) выполнено.

Докажем тождество 7:

$$4x \cdot c \cdot a \cdot b^2 \cdot (a \cdot c) \underset{(4)}{=} -4x \cdot c \cdot a \cdot a \cdot \left(b^2 \cdot c\right) - 4x \cdot c \cdot a \cdot c \cdot \left(a \cdot b^2\right) \underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=} 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot \left(b^2 \cdot c\right) - 2x \cdot c^2 \cdot a \cdot \left(a \cdot b^2\right) - 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot \left(a \cdot b^2\right) \underset{(4)}{=}$$

$$\underset{(4)}{=} -2x \cdot c \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c - 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot c \cdot b^2 + x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a + 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot a \cdot b^2 \underset{(5)}{=}$$

$$\underset{(5)}{=} x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + 2x \cdot a \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a - 2x \cdot c \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c.$$

Докажем тождество (8):

$$8x\cdot c\cdot a\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b)\underset{(4)}{=}-8x\cdot c\cdot a\cdot b\cdot a\cdot(c\cdot b)-8x\cdot c\cdot a\cdot b\cdot b\cdot(a\cdot c)\underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=}-4x\cdot c\cdot a^2\cdot b\cdot(c\cdot b)-4x\cdot c\cdot b\cdot a^2\cdot(c\cdot b)+4x\cdot c\cdot a\cdot b^2\cdot(a\cdot c)\underset{(4),(7)}{=}$$

$$2x\cdot c\cdot a^2\cdot c\cdot b^2+x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2+2x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a-2x\cdot c\cdot a^2\cdot b^2\cdot c-$$

$$-4x\cdot c\cdot b\cdot a^2\cdot(c\cdot b)\underset{(3),(7,\ a:=b,\ b:=a,\ c:=c)}{=}x\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2+x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+$$

$$+x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2+2\cdot x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a-2x\cdot c\cdot a^2\cdot b^2\cdot c-x\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2-2x\cdot b\cdot c^2\cdot a^2\cdot b+$$

$$+2x\cdot c\cdot b^2\cdot a^2\cdot c=x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2+2x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a-$$

$$-2x\cdot b\cdot c^2\cdot a^2\cdot b-2(x\cdot c)D_{a^2,b^2}\cdot c$$

Наконец, тождество (9):

$$8\big(x\cdot a\cdot b\cdot c\cdot b\cdot(a\cdot c)-x\cdot c\cdot a\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b)\big)\underset{(6),(8)}{=}-x\cdot b^2\cdot a^2\cdot c^2+$$

$$+2x\cdot c\cdot a^2\cdot b^2\cdot c-2x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a-x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2-x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2-$$

$$-2x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a+2x\cdot b\cdot c^2\cdot a^2\cdot b+2(x\cdot c)D_{a^2,b^2}\cdot c=$$

$$=-\varepsilon\big(x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2\big)-4x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a+2x\cdot b\cdot c^2\cdot a^2\cdot b+4x\cdot c\cdot a^2\cdot b^2\cdot c-2x\cdot c\cdot b^2\cdot a^2\cdot c.$$

Аналогично

$$8\big(x\cdot a\cdot c\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b)-x\cdot b\cdot a\cdot c\cdot b\cdot(c\cdot a)\big)\underset{(6),(8,\ b:=c,\ c:=b)}{=}-\varepsilon\big(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\big)-$$

$$-4x\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot a+2x\cdot c\cdot b^2\cdot a^2\cdot c+4x\cdot b\cdot a^2\cdot c^2\cdot b-2x\cdot b\cdot c^2\cdot a^2\cdot b.$$

Поэтому

$$8\big(x\cdot a\cdot b\cdot c\cdot b\cdot(a\cdot c)-x\cdot c\cdot a\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b)-x\cdot a\cdot c\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b)+x\cdot b\cdot a\cdot c\cdot b\cdot(c\cdot a)\big)=$$

$$=\varepsilon\big(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2-xa^2\cdot c^2\cdot b^2\big)+4(x\cdot a)D_{b^2,c^2}\cdot a+4(x\cdot b)D_{c^2,a^2}\cdot b+$$

$$+4(x\cdot c)D_{a^2,b^2}\cdot c\underset{(2)}{=}2\varepsilon\big(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+2(x\cdot a)D_{b^2,c^2}\cdot a\big).$$

Предложение доказано.

Легко проверить, что в алгебре A выполнены следующие слабые тождества

$$[a,x]\cdot[b,y]+[b,x]\cdot[a,y]=12(a\cdot b)\cdot(x\cdot y), \tag{10}$$

$$xyz+zyx=-4xzy. \tag{11}$$

Действительно,

$$[x,y]^2=\frac{1}{2}\big[[x^2,y],y\big]-\big[[x,y],y\big]\cdot x=2x^2\cdot y^2-2x^2\cdot y\cdot y-$$

$$-4y^2\cdot x\cdot x+4x\cdot y\cdot y\cdot x=3x^2\cdot y^2+2y^2\cdot x^2+x^2\cdot y^2=b\cdot x^2\cdot y^2,$$

линеаризуя это тождество по x и y, получим (10), и

$$xyz+zyx=2x\cdot y\cdot z+2z\cdot y\cdot x-2x\cdot z\cdot y=-4x\cdot z\cdot y$$

Предложение 2. В алгебре A выполнены следующие слабые тождества

$$[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]=s(x,a^2,b^2,c^2)+2\big(x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a+x\cdot b\cdot a^2\cdot c^2\cdot b\big)+$$
$$+8[x\cdot a\cdot b\cdot c,c]\cdot[a,b], \tag{12}$$

где $s(x,a^2,b^2,c^2)=12\big(2x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+x\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2+x\cdot b^2\cdot a^2\cdot c^2+x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\big)$;

$$[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]=4\big(x\cdot b^2\cdot(a^2\cdot c^2)-x\cdot c^2\cdot(a^2\cdot b^2)\big)+$$

$$+8\varepsilon\big(x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+2(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\big). \tag{13}$$

Доказательство. Докажем тождество (12).

$$[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]=2[x\cdot a,\ a]\cdot[b^2,c^2]+2[x\cdot a,b^2]\cdot[a,c^2]+$$

$$+2[x\cdot a,b^2]\cdot[c^2,a]\underset{(10)}{=}-24x\cdot a\cdot c^2(a\cdot b^2)+$$

$$+4[x\cdot a\cdot b,\ b]\cdot[c^2,a]+4[x\cdot a\cdot b,c^2]\cdot[b,\ a]+4[x\cdot a\cdot b,c^2]\cdot[a,\ b]\underset{(10)}{=}$$

$$24x\cdot a\cdot c^2\cdot a\cdot b+24x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a-48x\cdot a\cdot b\cdot a\cdot(c^2\cdot b)+$$

$$+8[x\cdot a\cdot b\cdot c,c]\cdot[a,b]\underset{(3)}{=}12x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+12x\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2+$$

$$+24x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a+24x\cdot a^2\cdot b\cdot c^2\cdot b+24x\cdot a^2\cdot b\cdot b\cdot c^2+24x\cdot b\cdot a^2\cdot c^2\cdot b+$$

$$+24x\cdot b\cdot a^2\cdot b\cdot c^2+8[x\cdot a\cdot b\cdot c,c]\cdot[a,b]\underset{(3)}{=}12x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+12x\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2+24x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a+$$

$$+12x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+12x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2-12x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+24x\cdot b\cdot a^2\cdot c^2\cdot b+$$

$$+12x\cdot b^2\cdot a^2\cdot c^2+12x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+8[x\cdot a\cdot b\cdot c,c]\cdot[a,b]=$$

$$=24x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+12x\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2+12x\cdot b^2\cdot a^2\cdot c^2+12x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+$$

$$+24\left(x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a+x\cdot b\cdot a^2\cdot c^2\cdot b\right)+8[x\cdot a\cdot b\cdot c,c]\cdot[a,b].$$

Теперь используя тождество (12), имеем

$$[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]=s(x,a^2,b^2,c^2)+24\left(x\cdot b\cdot a^2\cdot c^2\cdot b+x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a\right)+$$

$$+8[x\cdot a\cdot b\cdot c,c][a,b],$$

$$[x,b^2]\cdot[c^2,a^2]=s(x,b^2,c^2,a^2)+24\left(x\cdot b\cdot a^2\cdot c^2\cdot b+x\cdot c\cdot b^2\cdot a^2\cdot c\right)+$$

$$+8[x\cdot b\cdot c\cdot a,a]\cdot[b,c],$$

$$[x,c^2]\cdot[a^2,b^2]=s(x,c^2,a^2,b^2)+24\left(x\cdot c\cdot b^2\cdot a^2\cdot c+x\cdot a\cdot c^2\cdot b^2\cdot a\right)+$$

$$+8[x\cdot c\cdot a\cdot b,b][c,a],$$

$$[x,a^2]\cdot[c^2,b^2]=s(x,a^2,c^2,b^2)+24\left(x\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot a+x\cdot c\cdot a^2\cdot b^2\cdot c\right)+$$

$$+8[x\cdot a\cdot c\cdot b,b]\cdot[a,c],$$

$$[x,b^2]\cdot[a^2,c^2]=s(x,b^2,a^2,c^2)+24\left(x\cdot b\cdot c^2\cdot a^2\cdot b+x\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot a\right)+$$

$$+8[x\cdot b\cdot a\cdot c,c]\cdot[b,a],$$

$$[x,c^2]\cdot[b^2,a^2]=s(x,c^2,b^2,a^2)+24\left(x\cdot c\cdot a^2\cdot b^2\cdot c+x\cdot b\cdot c^2\cdot a^2\cdot b\right)+$$

$$8[x\cdot c\cdot b\cdot a,a]\cdot[c,b].$$

Складывая первые три равенства и вычитая из них сумму последних трех, получим

$$2\varepsilon[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]=\varepsilon\left(s(x,a^2,b^2,c^2)-s(x,a^2,c^2,b^2)\right)-$$
$$-48\varepsilon(x\cdot a)D_{b^2,c^2}\cdot a+8\left([x\cdot a\cdot b\cdot c,c][a,b]+[x\cdot b\cdot c\cdot a,a]\cdot[b,c]\right)+$$

$$+[x\cdot c\cdot a\cdot b,b]\cdot[c,a]-[x\cdot a\cdot c\cdot b,b]\cdot[a,c]-[x\cdot b\cdot a\cdot c,c]\cdot[b,a]-[x\cdot c\cdot b\cdot a,a]\cdot[c,b]).$$

Имеем

$$2\varepsilon[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]=2[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]+2[x,b^2]\cdot[c^2,a^2]+2[x,c^2]\cdot[a^2,b^2]\underset{(10)}{=}$$

$$\underset{(10)}{=}6[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]+24x\cdot c^2\cdot(a^2\cdot b^2)-24x\cdot b^2\cdot(a^2\cdot c^2),$$

$$\varepsilon\left(s(x,a^2,b^2,c^2)-s(x,a^2,c^2,b^2)\right)\underset{(2)}{=}\varepsilon\left(12x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2-12x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right)\underset{(2)}{=}$$
$$24\varepsilon\left(x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2\right),$$

$$8\left([x\cdot a\cdot b\cdot c,c]\cdot[a,b]+[x\cdot b\cdot c\cdot a,a]\cdot[b,c]+[x\cdot c\cdot a\cdot b,b]\cdot[c,a]-\right.$$

$$\left.-[x\cdot a\cdot c\cdot b,b]\cdot[a,c]-[x\cdot b\cdot a\cdot c,c]\cdot[b,a]-[x\cdot c\cdot b\cdot a,a]\cdot[c,b]\right)\underset{(10)}{=}$$

$$\underset{(10)}{=}-96x\cdot a\cdot b\cdot c\cdot b\cdot(a\cdot c)+96x\cdot c\cdot a\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b)+96x\cdot a\cdot c\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b)-$$

$$-96x\cdot b\cdot a\cdot c\cdot b\cdot(a\cdot c)+8[\varepsilon(x\cdot a\cdot b\cdot c+x\cdot a\cdot c\cdot b),a]\cdot[b,c]\underset{(2),(9)}{=}$$

$$\underset{(2),(9)}{=}-24\varepsilon\left(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+2(x\cdot a)D_{b^2,c^2}\cdot a\right).$$

Таким образом

$$6[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]+24\left(x\cdot c^2\cdot(a^2\cdot b^2)-x\cdot b^2\cdot(a^2\cdot c^2)\right)=$$

$$=24\varepsilon\left(x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2-48\varepsilon(x\cdot a)D_{b^2,c^2}\cdot a-24\varepsilon\right(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+$$

$$+2\varepsilon(x\cdot a)D_{b^2,c^2}\cdot a\big)\underset{(2)}{=}48\varepsilon\left(x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+2(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\right),$$

и

$$[x,a^2]\cdot[b^2,c^2]=8\varepsilon\left(x\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2+2(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\right)+4\left(x\cdot b^2\cdot(a^2\cdot c^2)-x\cdot c^2\cdot(a^2\cdot b^2)\right).$$

Предложение доказано.

Легко проверить, что в A выполнено следующее слабое тождество

$$\{x_1x_2x_3x_4\}=\frac{1}{2}[x_1,x_2]\cdot[x_3,x_4]+2x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4-2x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot x_3-4x_3\cdot x_4\cdot x_1\cdot x_2. \quad (14)$$

Действительно,

$$2[x_1, x_2]\cdot[x_3, x_4] = \{x_1x_2x_3x_4\} + \{x_2x_1x_4x_3\} - \{x_1x_2x_4x_3\} =$$

$$= \{x_1x_2x_3x_4\} + 2\{(x_1 \cdot x_2)x_4x_3\} - 2\{x_1x_2x_4x_3\} - 2\{(x_1 \cdot x_2)x_3x_4\} + \{x_1x_2x_3x_4\} \underset{(11)}{=}$$

$$\underset{(11)}{=} 4\{x_1x_2x_3x_4\} - 8x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 - 4\{x_1x_2(x_3 \cdot x_4)\} + 8x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_3 \underset{(11)}{=}$$

$$\underset{(11)}{=} 4\{x_1x_2x_3x_4\} - 8x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + 8x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_3 + 16x_3 \cdot x_4 \cdot x_1 \cdot x_2 .$$

Лемма 1. Тождество Зельманова-Скосырского степени 3 имеет следующий вид

$$\{xa^2b^2c^2\} = 8\left(x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + \varepsilon(x \cdot a)D_{c^2, b^2} \cdot a\right). \qquad (15)$$

Доказательство. Имеем

$$\{xa^2b^2c^2\} \underset{(14)}{=} \frac{1}{2}[x, a^2]\cdot[b^2, c^2] + 2x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 - 2x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 - 4b^2 \cdot c^2 \cdot x \cdot a^2 \underset{(13)}{=}$$

$$\underset{(13)}{=} 2\left(x \cdot b^2 \cdot (a^2 \cdot c^2) - x \cdot c^2 \cdot (a^2 \cdot b^2)\right) + 4\varepsilon\left(x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 + 2(x \cdot a)D_{c^2, b^2} \cdot a\right) +$$

$$+2x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 - 2x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 + 4x \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 + 4x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 =$$

$$= -2x \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 - 2x \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 + 2x \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + 4x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 +$$

$$+4x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + 4x \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 8\varepsilon(x \cdot a)D_{c^2, b^2} \cdot a + 2x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 - 2x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 +$$

$$+4x \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 + 4x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 = 10x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + 2x \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 +$$

$$+2x \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 + 2x \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2x \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^2 + 2x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 + 2x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 +$$

$$+8\varepsilon(x \cdot a)D_{c^2, b^2} \cdot a \underset{(2)}{=} 8\left(x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + \varepsilon(x \cdot a)D_{c^2, b^2} \cdot a\right).$$

Лемма доказана.

2. Пример неспециальной *JB*-алгебры порожденной множеством U.

Теперь, используя ЗС-тождество степени 3, мы построим пример неспециально JB-алгебры. Нам потребуется некоторое уточнение теоремы 3 [4].

Обозначим через N_3 – многообразие ниль-индекса 3 йордановых алгебр. Пусть $C = Fe \oplus U \oplus Z$ – некоторая алгебра над F и

$$U^2 \subseteq Z, \quad Z^2 \subseteq U, \quad UZ \subseteq U$$

$$e^2 = e, \quad e \cdot u = \frac{1}{2}u, \quad e \cdot z = 0,$$

для всех $n \in U$, $z \in Z$. Тогда верна следующая лемма.

Лемма 2. C – *JB*-алгебра $\Leftrightarrow$

$$U \oplus Z \subseteq N_3, \quad Z^2 = (0).$$

Доказательство. $\Rightarrow$ следует из теоремы 3 [4].

$\Leftarrow$ Пусть $x = \alpha \cdot e + u + z$, положим $\omega(x) = \alpha$, $\alpha \in F$. Ясно, что $\omega : C \to F$ – гомоморфизм. Тогда

$$x^2 = \alpha^2 e + \alpha u + u^2 + 2u \cdot z = \alpha^2 e + (\alpha u + 2u \cdot z) + u^2,$$

$$(x^2)^2 = \alpha^4 e + \alpha^2 u^2 + 4(uz)(uz) + 4\alpha(u \cdot z) \cdot u +$$

$$+\alpha^2(\alpha u + 2u \cdot z) + 2(\alpha u + 2u \cdot z) \cdot u^2 = \alpha^4 e + \alpha^2 u^2 +$$

$$+\alpha^3 u + 2\alpha^2 n \cdot z = \alpha^2\left(\alpha^2 e + (\alpha u + zu \cdot z) + u^2\right) = \omega(x)^2 x^2 .$$

Лемма доказана.

Пусть $N_3 = N_3[X, Y]$ – свободная ниль-индекса 3 йорданова алгебра от множества порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$, таких, что $X \cap Y = \phi$. Введем на N_3 следующую градуировку

$$N_3 = N_0 \oplus N_1,$$

где N_1 – подпространство элементов нечетной длины по X, N_0 – подпространство элементов четной длины по X. При этом считаем, что элемент из N_3 нулевой длины по X принадлежит N_0. Рассмотрим фактор-алгебру

$$\bar{N} = N_3/I,$$

где I – идеал алгебры N_3, порожденный элементами $a \cdot b$, где a, $b \in N_0$. Тогда, естественным образом

$$\bar{N} = U \oplus Z,$$

где $= \bar{N}_1$, $Z = \bar{N}_0$ – образы N_1 и N_0 в фактор-алгебре $\bar{N}$. Присоединим формально к $\bar{N}$ идемпотент e, полагая

$$e \cdot u = \frac{1}{2}u, \quad e \cdot z = 0,$$

для всех $u \in U$, $z \in Z$. Тогда в силу леммы 2, алгебра $B = Fe \oplus U \oplus Z$ является JB-алгеброй. Назовем ее ***UZ*-свободной** и будем обозначать через $JBU[X]Z[Y]$.

Отметим, что алгебра $JBU[X]Z[Y]$ не является свободной алгеброй в классе JB-алгебр. Следующая теорема объясняет смысл UZ-свободы алгебры $JBU[X]Z[Y]$.

Теорема 1. Пусть $A = U \oplus Z$ производная алгебра из многообразия N_3, такая что

$$U^2 \subseteq Z, \quad UZ \subseteq U, \quad Z^2 = 0. \tag{16}$$

Тогда всякое отображение $\sigma : XUY \to A$, такое что

$$\sigma : X \to U, \quad \sigma : Y \to Z, \tag{17}$$

единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебры $JBU[X]Z[Y]$ в A.

Доказательство. Отображение σ единственным образом продолжается до естественного гомоморфизма

$$:N_3[X,Y] \to A.$$

Пусть $\ker\varphi = I_1$. Рассмотрим однородный элемент $w = w(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \in N_3[X,Y]$, такой, что $d_x(w) = n$. Докажем индукцией по n, что

$$\varphi(w) \in Z \text{ , если n - четное,}$$
$$\varphi(w) \subseteq U \text{ , если n - нечетное.}$$

1. $n = 0$, тогда $\varphi(w) \underset{(16)}{=} 0$.

2. $n =$, тогда $\varphi(w) = \varphi\left(\sum_i \alpha_I x_1 \cdot y_{i_1} \cdot \ldots \cdot y_{i_m}\right) = \sum_i \alpha_I \varphi(x_1) \cdot \varphi(y_{i_1}) \ldots \varphi(y_{i_m}) \underset{(16),(17)}{\in} U$,

где $\alpha_I \in F$.

3. Пусть для всех однородных $u \in N_3$, $d_x(u) < n$ утверждение выполнено.

Рассмотрим однородный элемент $w \in N_3$, $d_x(w) = n$.

a) n-четное. Тогда

$$w = \sum_i u_i \cdot x_i + \sum_i v_i \cdot y_i,$$

и

$$\varphi(w) = \sum_i \varphi(u_i) \cdot \varphi(x_i) + \sum_i \varphi(v_i) \cdot \varphi(y_i).$$

По предположению индукции имеем:

$$\varphi(u_i) \in U, \quad \varphi(x_i) \underset{(17)}{\in} U, \quad \varphi(u_i) \cdot \varphi(x_i) \in U \cdot U \underset{(16)}{\subseteq} Z,$$

$$\varphi(v_i) \in Z, \quad \varphi(y_i) \underset{(17)}{\in} Z, \quad \varphi(v_i) \cdot \varphi(y_i) \in Z^2 \underset{(16)}{=} 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(w) \in Z.$$

b) n-нечетное. Аналогично

$$\varphi(u_i) \in Z, \quad \varphi(x_i) \underset{(17)}{\in} U, \quad \varphi(u_i) \cdot \varphi(x_i) \in U \cdot Z \underset{(16)}{\subseteq} U,$$

$$\varphi(v_i) \in U, \quad \varphi(y_i) \in Z, \quad \varphi(v_i) \cdot \varphi(y_i) \in U \cdot Z \underset{(16)}{\subseteq} U,$$

и $\varphi(w) \in U$.

Поэтому $I \subseteq I_1$. Следовательно по первой теореме о гомоморфизмах

$$N_3[X,Y]/I_1 \cong N_3[X,Y]/I/I_1/I,$$

и канонический гомоморфизм $\psi : N_3[X,Y] \to N_3[X,Y]/I$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\eta : N_3[X,Y]/I \to N_3[X,Y]/I_1$ так, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
N_3 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & JBU[X]Z[Y] \arrow[dl, "\eta"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Теорема доказана.

В случае, когда $\;\; = \varnothing$ свободную алгебру будем называть ***U*-свободной** и обозначать через $JBU[X]$. По определению

$$JBU[X] \cong N_3[X]/I,$$

где

$$N_3 = N_0 + N_1,$$

N_0 – подпространство элементов нечетной длины, N_1 – подпространство элементов четной длины, и I – идеал алгебры N_3 порожденный элементами $a \cdot b$, где a, $b \in N_0$.

Мы докажем, что алгебра $JBU[x,a,b,c]$ не является специальной. Для этого нам потребуется доказать, что элемент

$$w = \varepsilon(x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2) \neq 0$$

в алгебре $JBU[x, a, b, c]$. Предположим противное. Тогда по определению U-свободной алгебры

$$w \in I,$$

где I – идеал N_3 порожденный элементами $a \cdot b$, где $a, b \in N_0$. В силу однородности алгебры N_3 можно считать, что $w = \sum_i \alpha_i w_i$, где $\alpha_i \in F$ и однородные элементы $w_i \in I$ и имеют тип [1, 2, 2, 2]. Пусть I_1 – F-подмодуль I порожденный одночленами из I типа [1, 2, 2, 2]. Будем писать $u \equiv_1 v$, если $u - v \in I_1$.

Лемма 3. I_1 как F-подмодуль порождается с точностью до перестановок a, b, c, элементами

$$x \cdot a \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a, \quad a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot x, \quad a^2 \cdot b^2 \cdot x \cdot c^2.$$

Доказательство. Рассмотрим все элементы из I_1 с точностью до перестановки a, b, c:

1. $$(x\cdot a)\cdot(b\cdot c)\cdot a\cdot c\cdot b = -\frac{1}{2}a^2\cdot(b\cdot c)\cdot x\cdot c\cdot b = \frac{1}{2}(x\cdot c)\cdot a^2\cdot b\cdot c\cdot b +$$

$$+\frac{1}{2}(x\cdot b)\cdot a^2\cdot c\cdot c\cdot b \underset{(3)}{=} \frac{1}{4}(x\cdot c)\cdot a^2\cdot b^2\cdot c + \frac{1}{4}(x\cdot c)\cdot a^2\cdot c\cdot b^2 \equiv_1 \frac{1}{8}c^2\cdot a^2\cdot x\cdot b^2 \equiv_1 0,$$

$$(x\cdot a)\cdot(b\cdot c)\cdot b\cdot a\cdot c = -\frac{1}{2}(x\cdot a)\cdot b^2\cdot c\cdot a\cdot c \underset{(3)}{=} -\frac{1}{4}(x\cdot a)\cdot b^2\cdot c^2\cdot a -$$

$$-\frac{1}{4}(x\cdot a)\cdot b^2\cdot a\cdot c^2 \equiv_1 -\frac{1}{8}a^2\cdot b^2\cdot x\cdot c^2 \equiv_1 0,$$

$$(x\cdot a)\cdot(b\cdot c)\cdot b\cdot c\cdot a = -\frac{1}{2}(x\cdot a)\cdot b^2\cdot c\cdot c\cdot a = \frac{1}{4}(x\cdot a)\cdot b^2\cdot c^2\cdot a \equiv_1 0.$$

2. $$(x\cdot a)\cdot b^2\cdot a\cdot c^2 = -\frac{1}{2}a^2\cdot b^2\cdot x\cdot c^2 \equiv_1 0,$$

$$(x\cdot a)\cdot b^2\cdot c^2\cdot a \equiv_1 0.$$

3. $a^2\cdot(b\cdot c)\cdot x\cdot b\cdot c = -a^2\cdot(b\cdot x)\cdot b\cdot b\cdot c - a^2\cdot(c\cdot x)\cdot c\cdot b\cdot c \equiv_1 0$, в виду доказанного в случае 2.

$$a^2\cdot(b\cdot c)\cdot b\cdot x\cdot c = -\frac{1}{2}a^2\cdot b^2\cdot c\cdot x\cdot c = -\frac{1}{4}a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x - \frac{1}{4}a^2\cdot b^2\cdot x\cdot c^2 \equiv_1 0,$$

$$a^2\cdot(b\cdot c)\cdot b\cdot c\cdot x = \frac{1}{4}a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x \equiv_1 0.$$

4. $$a^2\cdot b^2\cdot c\cdot x\cdot c \equiv_1 a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x \equiv_1 a^2\cdot b^2\cdot x\cdot c^2 \equiv_1 0.$$

5. $$(a\cdot b)\cdot x\cdot c\cdot(a\cdot c)\cdot b = -\frac{1}{2}(a\cdot b)\cdot x\cdot a\cdot c^2\cdot b = \frac{1}{4}a^2\cdot x\cdot b\cdot c^2\cdot b \equiv_1 0.$$

$$(a\cdot b)\cdot x\cdot c\cdot(a\cdot b)\cdot c = \frac{1}{2}(a\cdot b)\cdot x\cdot c^2\cdot(a\cdot b) + \frac{1}{2}(a\cdot b)\cdot x\cdot(a\cdot b)\cdot c^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}(a\cdot b)^2\cdot c^2\cdot x - \frac{1}{4}(a\cdot b)^2\cdot x\cdot c^2 \equiv_1 0,$$

$$a^2\cdot x\cdot b\cdot(b\cdot c)\cdot c = -\frac{1}{2}a^2\cdot x\cdot b\cdot c^2\cdot b \underset{(3)}{=} -\frac{1}{4}a^2\cdot c\cdot b^2\cdot c^2 - \frac{1}{4}a^2\cdot x\cdot c^2\cdot b^2 \equiv_1 0,$$

$$a^2\cdot x\cdot b\cdot c^2\cdot b \underset{(3)}{=} \frac{1}{2}a^2\cdot x\cdot b^2\cdot c^2 + \frac{1}{2}a^2\cdot x\cdot c^2\cdot b^2 \equiv_1 0.$$

Все остальные случаи получаются перестановками a, b, c. Лемма доказана.

Пусть $SJ_3[a, b, c]$ – свободная специальная ниль-индекса 3 йорданова алгебра, $Ass_3[a, b, c]$ – свободная ассоциативная алгебра со слабым йордановым тождеством $x^3 = 0$. В силу теоремы 2 [16], алгебра $SJ_3[a, b, c]$ – специальна и $Ass_3[a, b, c]$ – ее ассоциативная универсальная обертывающая.

Лемма 4. Пусть $w = \varepsilon(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2) = 0$ в алгебре $JBU = JBU[x, a, b, c]$, тогда в алгебре $Ass_3 = Ass_3[a, b, c]$ выполнено слабое тождество вида:

$$\varepsilon[a\cdot b^2\cdot c^2, a] + \varepsilon(\beta - 1)[a, b]\cdot(c^2\cdot a\cdot b) = 0, \tag{18}$$

где $\beta \in F$.

Доказательство. Пусть $w = 0$ в BU, тогда $w \equiv_1 0$ в алгебре $N_3[x, a, b, c]$. В силу леммы 3

$$w = \sum_\sigma \Big(\alpha_\sigma\cdot x\cdot\sigma(a)\cdot\sigma(b)^2\cdot\sigma(c)^2\cdot\sigma(a) + \beta_\sigma\sigma(a)^2\cdot\sigma(b)^2\cdot\sigma(c)^2\cdot x +$$

$$+\gamma_\sigma\cdot\sigma(a)^2\cdot\sigma(b)^2\cdot x\cdot\sigma(c)^2\Big),$$

где $\sigma \in S_3$ – симметрической группе перестановок символов a, b, c; $\alpha_\sigma, \beta_\sigma, \gamma_\sigma \in F$. Тогда

$$\varepsilon(w) = 3(w) \underset{(2),(4)}{=} \alpha\varepsilon(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot a),$$

где $\alpha \in F$. Поэтому в алгебре UN_3 – универсальной мультипликативной обертывающей алгебры N_3 имеем R-тождество

$$\varepsilon\left(a^2 \cdot b^2 \cdot c^2\right) = \beta\varepsilon\left(a \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a\right), \tag{19}$$

для некоторого $\beta \in F$.

В силу предложения 3 [17], алгебра Ass_3 является гомоморфным образом $UN3$. Следовательно в алгебре Ass_3 выполнено слабое тождество (19).

Используя известные ассоциативные тождества

$$[x \cdot y, z] = [y, z] \cdot x + [x, z] \cdot y,$$

$$[x \cdot y, z] = [x, z \cdot y] + [y, z \cdot x], \tag{20}$$

$$xy = x \circ y + \frac{1}{2}[x, y],$$

выполняющиеся в любой ассоциативной алгебре, приведем тождество (19) к искомому виду.

$$a^2b^2c^2 = a^2 \cdot b^2c^2 + \frac{1}{2}\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[a^2 \cdot b^2, c^2\right] + \frac{1}{2}\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2 + \frac{1}{4}\left[\left[a^2, b^2\right], c^2\right].$$

Поэтому

$$\varepsilon\left(a^2b^2c^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\left[a^2 \cdot b^2, c^2\right] + \left[a^2, b^2\right] \cdot c^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2 + \frac{1}{2}\left(\left[a^2 \cdot b^2, c^2\right] + \left[b^2 \cdot c^2, a^2\right] + \left[c^2 \cdot a^2, b^2\right]\right) = \frac{1}{2}\varepsilon\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2.$$

С другой стороны

$$ab^2c^2a = ab^2 \cdot c^2a + \frac{1}{2}a \cdot \left[b^2, c^2\right] \cdot a \underset{(11)}{=} -4b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 + \left[b^2, c^2\right] \cdot a \cdot a -$$

$$-\frac{1}{2}\left[b^2, c^2\right] \cdot a^2 = -4b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 + \left[b^2, c^2\right] \cdot a \cdot a - \left[b^2, c^2\right] \cdot a^2 + \frac{1}{2}\left[b^2, c^2\right] \cdot a^2 = -4b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\left[a, \left[\left[b^2, c^2\right], a\right]\right] + \frac{1}{2}\left[b^2, c^2\right] \cdot a^2 = -4b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 + \left[a, aD_{c^2, b^2}\right] + \frac{1}{2}\left[b^2, c^2\right] \cdot a^2,$$

и

$$\varepsilon\left(ab^2c^2a\right) = \varepsilon\left[a, aD_{c^2, b^2}\right] + \frac{1}{2}\varepsilon\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2.$$

Таким образом имеем слабое тождество

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2 = \varepsilon\beta\left[a, aD_{c^2, b^2}\right] + \frac{1}{2}\varepsilon\beta\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2,$$

и

$$2\beta\varepsilon\left[a, aD_{c^2, b^2}\right] + (\beta - 1)\,\varepsilon\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2 = 0.$$

Но

$$\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2 = 2\left[a, b^2\right] \cdot a \cdot c^2 = 2\left[a, b^2\right] \cdot \left(a \cdot c^2\right) + \frac{1}{2}\left[a, \left[\left[a, b^2\right], c^2\right]\right] =$$

$$= 4[a, b] \cdot b \cdot \left(a \cdot c^2\right) + 2\left[a, c^2D_{b^2, a}\right] + 4[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) + \left[b, \left[[a, b], a \cdot c^2\right]\right] + 2\left[a, c^2D_{b^2, a}\right] =$$

$$= 4(a, b) \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) + 4\left[b, \left(c^2 \cdot a\right)D_{b, a}\right] = 4[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) + 2\left[a, c^2D_{b^2, a}\right] +$$

$$+\left[b, 4\left(c^2 \cdot a \cdot b \cdot a - c^2 \cdot a \cdot a \cdot b\right)\right] = 4[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) + 2\left[a, c^2D_{b^2, a}\right] + 2\left[b, a^2 \cdot c^2 \cdot b - a^2 \cdot b \cdot c^2\right] =$$

$$= 4[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) + 2\left[a, c^2D_{b^2, a}\right] + 2\left[b, a^2D_{c^2, b}\right].$$

Поэтому

$$\varepsilon\left[a^2, b^2\right] \cdot c^2 = 4\varepsilon[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) + 4\varepsilon\left[a, c^2D_{b^2, a}\right].$$

Заметим, что

$$\varepsilon\left[a, a \cdot b^2 \cdot c^2\right] = \varepsilon\left[a \cdot c^2, a \cdot b^2\right] + \varepsilon\left[a \cdot \left(a \cdot b^2\right), c^2\right] = \varepsilon\left[a \cdot c^2, a \cdot b^2\right] - \frac{1}{2}\varepsilon\left[a^2 \cdot b^2, c^2\right] =$$

$$= \varepsilon\left[a \cdot c^2, a \cdot b^2\right] = \varepsilon\left[a \cdot c^2 \cdot b^2, a\right] + \varepsilon\left[c^2 \cdot a \cdot a, b^2\right] = -\varepsilon\left[a, a \cdot c^2 \cdot b^2\right].$$

Следовательно

$$\varepsilon\left[a, aD_{c^2, b^2}\right] = 2\varepsilon\left[a, a \cdot c^2 \cdot b^2\right] = -2\varepsilon\left[a, a \cdot b^2 \cdot c^2\right] = 2\varepsilon\left[a \cdot b^2 \cdot c^2, a\right],$$

$$\varepsilon\left[a, c^2D_{b^2, a}\right] = \varepsilon\left[a, c^2 \cdot b^2 \cdot a\right] - \varepsilon\left[a, a \cdot c^2 \cdot b^2\right] = \varepsilon\left[a, a \cdot b^2 \cdot c^2\right] = -\varepsilon\left[a \cdot b^2 \cdot c^2, a\right].$$

Поэтому

$$4\beta\varepsilon\left[a\cdot b^2\cdot c^2, a\right]+4(\beta-1)\,\varepsilon[a,b]\cdot\left(c^2\cdot a\cdot b\right)-4(\beta-1)\,\varepsilon\left[a\cdot b^2\cdot c^2, a\right]=0$$

и

$$\varepsilon\left[a\cdot b^2\cdot c^2, a\right]+(\beta-1)\,\varepsilon[a,b]\cdot\left(c^2\cdot a\cdot b\right)=0.$$

Лемма доказана.

Предложение 3. В алгебре $Ass[a, b, c]$ выполнено тождество вида

$$\varepsilon([u, a]+[a, b]\cdot v)=0, \tag{21}$$

где однородные элементы u, $v \in SJ[a, b, c]$ и u – типа [1, 2, 2], v – типа [1, 1, 2], тогда и только тогда, когда

$$u=\alpha_1\left(\left\{ab^2c^2\right\}+\left\{ac^2b^2\right\}\right)+\alpha_2\left(\left\{c^2ab^2\right\}+\left\{abc^2b\right\}+\left\{acb^2c\right\}\right)+$$

$$+\alpha_3\left(\{abcbc\}+bcacb+cbabc+\{bacbc\}+\left\{b^2cac\right\}\right)+$$

$$+\alpha_4\left(bcacb+cbabc+\{bacbc\}+\{bcbac\}\right)+\alpha_5(bcacb+cbabc)+\alpha_6\{bcabc\},$$

$$v=\alpha_3\{cacb\}+\alpha_5\{cabc\},$$

где $\alpha_i \in F$.

Доказательство. Представим u и v в алгебре $Ass[a, b, c]$ в виде линейной комбинации линейно независимых тетрад, соответствующих типов:

$$w=\gamma_1\left\{ab^2c^2\right\}+\gamma_2\left\{ac^2b^2\right\}+\gamma_3\left\{c^2ab^2\right\}+\gamma_4\left\{c^2bab\right\}+\gamma_5\{acbcb\}+\gamma_6\left\{abc^2b\right\}+\gamma_7\{abcbc\}+$$

$$+\gamma_8\left\{acb^2c\right\}+\gamma_9\left\{bc^2ab\right\}+\gamma_{10}(bcacb)+\gamma_{11}\left\{cb^2ac\right\}+\gamma_{12}(cbabc)+\gamma_{13}\{bacbc\}+\gamma_{14}\{bcabc\}+$$

$$+\gamma_{15}\{bcbac\}+\gamma_{16}\left\{b^2cac\right\},$$

$$v=2\beta_1\left\{abc^2\right\}+2\beta_2\left\{bac^2\right\}+2\beta_3\left\{ac^2b\right\}+2\beta_4\{cabc\}+2\beta_5\{cacb\}+2\beta_6\{cbca\},$$

где γ_i, $\beta_i \in F$.

Подставим данные выражения u и v в (21) и раскроем скобки. Получим

$$\varepsilon([u, a]+[a, b]\cdot v)=\varepsilon\left(\sum_i\gamma_i u_i+\sum_i\beta_i v_i\right)=0,$$

где выражения для u_i:

$$u_1=ab^2c^2a+c^2b^2a^2-a^2b^2c^2-ac^2b^2a,$$

$$u_2=ac^2ba+b^2c^2a^2-ab^2c^2a-a^2c^2b^2,$$

$$u_3=c^2ab^2a+b^2ac^2a-ab^2ac^2-ac^2ab^2,$$

$$u_4=c^2baba+babc^2a-ac^2bab-ababc^2,$$

$$u_5=acbcba+bcbca^2-abcbca-a^2cbca,$$

$$u_6=abc^2ba+bc^2ba^2-abc^2ba-a^2bc^2b,$$

$$u_7=abcbca+cbcba^2-acbcba-a^2bcbc,$$

$$u_8=acb^2ca+cb^2ca^2-acb^2ca-a^2cb^2c,$$

$$u_9=bc^2aba+bac^2ba-abac^2b-abc^2ab,$$

$$u_{10}=bcacba-bcacb,$$

$$u_{11}=cb^2aca+cab^2ca-acab^2c-acb^2ac,$$

$$u_{12}=cbabca-acbabc,$$

$$u_{13}=bacbca+cbcaba-acbcab-abacbc,$$

$$u_{14}=bcabca+cbacba-acbacb-abcabc,$$

$$u_{15}=bcbaca+cabcba-acabcb-abcbac,$$

$$u_{16}=b^2caca+cacb^2a-acacb^2-ab^2cac,$$

выражения для v_i:

$$v_1=abc^2ab+c^2ba^2b-abc^2ba-c^2baba-bac^2ba-ba^2bc^2+abc^2ba+ababc^2,$$

$$v_2=bac^2ab+c^2abab-bac^2ba-c^2ab^2a-bac^2ab-babac^2+abc^2ab+ab^2ac^2,$$

$$v_3=ac^2bab+bc^2a^2b-ac^2b^2a-bc^2aba-babc^2a-ba^2c^2b+ab^2c^2a+abac^2b,$$

$$v_4=cabcab+cbacab-cabcba-cabcba-bacbac-bacabc+abcbac+abcbac,$$

$$v_5=cacbab+bcacab-cacb^2a-bcacba-babcac-bacacb+ab^2cac+abcacb$$

$$v_6=cbca^2b+acbcab-cbcaba-acbcba-ba^2cbc-bacbca+abacbc+abcbca.$$

Применим оператор ε и приведем подобные. Получим следующую систему уравнений:

$$\gamma_1-\gamma_2+2\beta_3=0,$$

$$\gamma_1 - \gamma_2 = 0,$$

$$\gamma_3 - \gamma_6 - \beta_2 = 0,$$

$$\gamma_3 - \gamma_8 + \beta_1 = 0,$$

$$\gamma_4 - \gamma_5 - \beta_1 = 0,$$

$$\gamma_4 - \gamma_{11} + \beta_6 = 0,$$

$$\gamma_5 - \gamma_7 + \beta_5 - \beta_6 = 0,$$

$$\gamma_7 - \gamma_{16} - \beta_2 = 0,$$

$$\gamma_9 - \gamma_{16} + \beta_5 = 0,$$

$$\gamma_9 - \gamma_{11} - \beta_1 - \beta_2 = 0,$$

$$\gamma_{10} - \gamma_{15} + \beta_4 - \beta_5 = 0,$$

$$\gamma_{12} - \gamma_{13} - \beta_4 + \beta_6 = 0,$$

$$-\gamma_{13} + \gamma_{15} + \beta_5 + \beta_6 = 0.$$

Решая эту систему, найдем:

$\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_1$, $\gamma_3 = \alpha_2$, $\gamma_4 = \gamma_5 = 0$, $\gamma_6 = \alpha_2$, $\gamma_7 = \alpha_3$, $\gamma_8 = \alpha_2$, $\gamma_9 = 0$, $\gamma_{10} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$,

$\gamma_{11} = 0$, $\gamma_{12} = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$, $\gamma_{13} = \alpha_3 + \alpha_4$, $\gamma_{14} = \alpha_6$, $\gamma_{15} = \alpha_4$, $\gamma_{16} = \alpha_3$,

$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$, $\beta_4 = \alpha_5$, $\beta_5 = \alpha_3$, $\beta_6 = 0$.

Предложение доказано.

Лемма 5. $w = \varepsilon\left(x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2\right) \neq 0$ в алгебре $JBU[x, a, b, c]$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, в силу леммы 4, в алгебре $Ass_3[a, b, c]$ выполнено тождество вида (18). Тогда в алгебре $Ass[a, b, c]$ выполнено тождество вида

$$\varepsilon\left[a \cdot b^2 \cdot c^2, a\right] + (\beta - 1)\, \varepsilon[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) = z,$$

где $z \in \hat{J}(SJ[a, b, c])$ – идеалу алгебры $Ass[a, b, c]$ порожденному Якобианами от йор-дановых многочленов. В силу леммы 4 [18] и кососимметричности z относительно стандартной инволюции алгебры $Ass[a, b, c]$ **z** может быть представлен в виде

$$z = [u_1, a] + [u_2, b] + [u_3, c] + [a, b] \cdot v_1 + [a, c] \cdot v_2 + [b, c] \cdot v_3,$$

где $u_i, v_i \in J(SJ[a, b, c])$ – идеалу алгебры $SJ[a, b, c]$ порожденному Якобианами от йордановых многочленов. Тогда

$$3\left(\varepsilon\left[a \cdot b^2 \cdot c^2, a\right] + (\beta - 1)\, \varepsilon[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right)\right) = \varepsilon(z),$$

и

$$\varepsilon\left[a \cdot b^2 \cdot c^2, a\right] + (\beta - 1)\, \varepsilon[a, b] \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) = \varepsilon[w_1, a] + \varepsilon[a, b] \cdot w_2,$$

где $w_1, w_2 \in J(SJ[a, b, c])$ и имеют типы [1, 2, 2], [1, 1, 2] – соответственно. Следовательно, в алгебре $Ass[a, b, c]$ выполнено тождество вида

$$\varepsilon\left[\left(a \cdot b^2 \cdot c^2 - w_1\right), a\right] + \varepsilon[a, b]\left((\beta - 1) \cdot \left(c^2 \cdot a \cdot b\right) - w_2\right) = 0.$$

В силу предложения 3,

$$a \cdot b^2 \cdot c^2 - w_1 = u, \quad (\beta - 1) \cdot c^2 \cdot a \cdot b - w_2 = v,$$

где u, v определяются по формулам (21).
Поэтому в алгебре $SJ_3[a, b, c]$ имеем тождеств

$$a \cdot b^2 \cdot c^2 = u, \quad (\beta - 1) c^2 \cdot a \cdot b = v. \tag{22}$$

Вычислим u и v используя (11):

$$\left\{ab^2c^2\right\} + \left\{ac^2b^2\right\} = -4a \cdot c^2 \cdot b^2 - 4a \cdot b^2 \cdot c^2 = 4b^2 \cdot c^2 \cdot a,$$

$$\left\{c^2ab^2\right\} + \left\{abc^2b\right\} + \left\{acb^2c\right\} = -4b^2 \cdot c^2 \cdot a - 4c^2 \cdot b^2 \cdot a - 4b^2 \cdot c^2 \cdot a = -12b^2 \cdot c^2 \cdot a^2,$$

$$\{abcbc\} + bcacb + cbabc + \{bacbc\} + \left\{b^2cac\right\} = 8b \cdot c^2 \cdot a \cdot b + 4a \cdot c^2 \cdot b^2 + 4a \cdot b^2 \cdot c^2 +$$

$$8b \cdot c^2 \cdot b \cdot a - 4a \cdot c^2 \cdot b^2 = -4a \cdot b^2 \cdot c^2 + 4a \cdot b^2 \cdot c^2 - 4b^2 \cdot c^2 \cdot a = -4b^2 \cdot c^2 \cdot a,$$

$$bcacb + cbabc + \{bacbc\} + \{bcbac\} = 4a \cdot c^2 \cdot b^2 + 4a \cdot b^2 \cdot c^2 + 8c \cdot b^2 \cdot c \cdot a + 8b \cdot c^2 \cdot b \cdot a =$$

$$= -4b^2 \cdot c^2 \cdot a - 4b^2 \cdot c^2 \cdot a - 4b^2 \cdot c^2 \cdot a = -12b^2 \cdot c^2 \cdot a,$$

$$bcacb + cbabc = 4a \cdot c^2 \cdot b^2 + 4a \cdot b^2 \cdot c^2 = -4b^2 \cdot c^2 \cdot a,$$

$$\{bcabc\} = 2\{bc(a \cdot b)c\} - \{bcbac\} = -8a \cdot b \cdot c^2 \cdot b -$$

$$-8c \cdot b^2 \cdot c \cdot a = 4b^2 \cdot c^2 \cdot a + 4b^2 \cdot c^2 \cdot a = 8b^2 \cdot c^2 \cdot a,$$

$$\{cacb\} = -4c^2 \cdot a \cdot b,$$

$$\{cabc\} = -4a \cdot b \cdot c^2 = 4c^2 \cdot a \cdot b + 4c^2 \cdot b \cdot a.$$

Таким образом, в алгебре $SJ_3[a, b, c]$

$$u = 4(\alpha_1 - 3\alpha_2 - \alpha_3 - 3\alpha_4 - \alpha_5 + 2\alpha_6)b^2 \cdot c^2 \cdot a,$$

$$v = 4(-\alpha_3 + \alpha_5) \cdot c^2 \cdot a \cdot b + 4\alpha_5 \cdot c^2 \cdot b \cdot a.$$

Рассмотрим пример $A[a, b, c]$ – ниль-индекса 3 йордановой алгебры из работы [17]. Пусть I-идеал алгебры $A[a, b, c]$ порожденный всеми $w \in A[a, b, c]$, такими, что

$$d_a(w) > 2, \text{ либо } d_b(w) > 2, \text{ либо } d_c(w) > 2. \tag{23}$$

Пусть $\tilde{A}[a, b, c] \cong A[a, b, c]/I$. Используя таблицу умножения, легко проверить,
что

$$\tilde{A} \cong SJ_3[a, b, c]/\tilde{I},$$

где $\tilde{I}$ – идеал алгебры $SJ_3[a, b, c]$, порожденный всеми $w \in SJ_3[a, b, c]$ удовлетворяющими (23). В силу теоремы 2 [16] алгебра $SJ_3[a, b, c]$ – специальная йорданова алгебра. Ввиду определения идеала $\tilde{I}$ и леммы Кона [15], алгебра $\tilde{A}$ – специальная йорданова алгебра. Поэтому тождества (22) выполняются в алгебре $\tilde{A}$.

Имеем в алгебре $\tilde{A}$:

$$b^2 \cdot c^2 \cdot a = e_6 \cdot e_4 \cdot e_1 = -2e_{18} \cdot e_1 = -4e_{27} - 4e_{28},$$

$$a \cdot b^2 \cdot c^2 = e_1 \cdot e_6 \cdot e_4 = -2e_{15} \cdot e_4 = 4e_{28}.$$

Поэтому $a \cdot b^2 \cdot c^2$ и u – линейно независимы и тождество (22) в алгебре $\tilde{A}$ не выполняется. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2. Всякая U-свободная JB-алгебра от более чем $3^{\underline{x}}$-порождающий не является специальной.

Доказательство. Рассмотрим алгебру $B = JBU[x, a, b, c]$. Предположим, что существует ассоциативная алгебра A такая, что B является подалгеброй алгебры $A^{(+)}$. Умножение в алгебре B будем обозначать точкой, умножая элементы в алгебре A, не будем ставить между ними ничего.

Пусть $u, v \in B$, тогда $u \cdot v = \frac{1}{2}(uv + vu)$ – это соотношение связывает умножение в алгебре A с умножением в алгебре B. Используя его, докажем, что тогда

$$w = \varepsilon(x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2) = 0$$

в алгебре B, что будет противоречить лемме 5. Мы будем использовать очевидные соотношения в алгебре A

$$2e \cdot x = x = xe + ex,$$

$$ez = ze = 0, \tag{24}$$

для всех $x \in U$, $z \in Z$.

Пусть $\tilde{A}$ – подалгебра алгебры A порожденная множеством $\oplus Z$. Очевидно, что $\tilde{A}$ – ассоциативная алгебра со слабым йордановым тождеством $x^3 = 0$. Поэтому в алгебре $\tilde{A}$ выполнено 3С-тождество степени 3. Имеем

$$\{xa^2b^2c^2\} \underset{(15)}{=} 8(x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + \varepsilon(x \cdot a)D_{c^2, b^2} \cdot a) = -8x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2.$$

С другой стороны

$$\{xa^2b^2c^2\} = 2\{(x \cdot a^2)bc^2\} - \{a^2xb^2c^2\} \underset{(11),(24)}{=} -8x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 - 2\{a^2(x \cdot e)b^2c^2\} \underset{(24)}{=}$$

$$\underset{(24)}{=} -8x \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot b^2 - \{a^2exb^2c^2\} - \{a^2xeb^2c^2\} = 8x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2.$$

Следовательно,

$$-8x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 8x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

и

$$x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 0.$$

Но тогда и $w = \varepsilon(x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2) = 0$. Следовательно алгебра $JBU[x, a, b, c]$ – неспециальная йорданова алгебра. Теорема доказана.

3. Пример неспециальной *JB*-алгебры со специальным ядром.

Пусть M – некоторый класс алгебр над F и $F[X]$ – свободная алгебра в классе M от множества порождающий $X\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Фактор-алгебру

$$\tilde{F}[X] \cong F[X]/I[n_1, n_2, \ldots],$$

где $I[n_1, n_2, \ldots]$ – идеал алгебры $F[X]$, порожденный всеми $w \in F[X]$ такими, что

$$d_{x_1}(w) > n_1, \text{ либо } d_{x_2}(w) > n_2, \text{ либо } \ldots,$$

будем называть **свободной типа** $[n_1, n_2, \ldots]$.

Мы собираемся доказать, что алгебра $B = JBU[x, a, b]\, Z[z]$ типа $[1, 2, 2, 1]$ является неспециальной JB-алгеброй со специальным ядром $\oplus Z$.

Доказательство неспециальности алгебры B будет в точности повторять схему доказательства теоремы 2. Нам потребуется аналог 3С-тождества для ассоциативной обертывающей алгебры B. Пусть $\overline{A}$ – универсальная обертывающая алгебры B. Заметим, что в этом случае, мы не требуем изоморфного вложения алгебры B в $\overline{A}^{(+)}$. Обозначим через A подалгебру $\overline{A}$ порожденную образом $\oplus Z$ при естественном вложении $\varphi: B \to \overline{A}$. Очевидно, что A – ассоциативная алгебра со слабым йордановым тождеством $x^3 = 0$.

Слабое йорданов тождество в A

$$f(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=0$$

будем называть **градуированным**, если оно выполнено для всех $x_i \in \varphi(U)$, $y_i \in \varphi(Z)$.

Лемма 6. В алгебре A выполнено градуированное слабое йорданово тождество

$$[z,a^2]\cdot[b^2,x]=24x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2, \tag{25}$$

где $a,b,x\in\varphi(U)$, $z\in\varphi(Z)$.

Доказательство. Ввиду того, что $\varphi(Z)^2=0$, имеем

$$[z,a^2]\cdot[b^2,x]=2[z\cdot a,a]\cdot[b^2,x]\underset{(10)}{=}-2[z\cdot a,b^2]\cdot[a,x]-24z\cdot a\cdot x\cdot(a\cdot b^2)=$$

$$=-4[z\cdot a\cdot b,b]\cdot[a,x]+24z\cdot a\cdot x\cdot a\cdot b^2\underset{(10)}{=}4[z\cdot a\cdot b,a]\cdot[b,x]+48z\cdot a\cdot b\cdot x\cdot(a\cdot b)+12x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot a\cdot b,a]\cdot[b,x]-48z\cdot a\cdot b\cdot a\cdot(x\cdot b)-48z\cdot a\cdot b\cdot b\cdot(x\cdot a)+12x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2\underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=}4[z\cdot a\cdot b,a]\cdot[b,x]-24z\cdot b\cdot a^2\cdot(x\cdot b)+24z\cdot a\cdot b^2\cdot(x\cdot a)+12x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot a\cdot b,a]\cdot[b,x]+24z\cdot b\cdot(x\cdot b)\cdot a^2-24z\cdot a\cdot(x\cdot a)\cdot b^2+12x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot a\cdot b,a]\cdot[b,x]-12z\cdot x\cdot b^2\cdot a^2+12z\cdot x\cdot a^2\cdot b^2+12x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=4[z\cdot a\cdot b,a]\cdot[b,x]+36z\cdot x\cdot a^2\cdot b^2.$$

С другой стороны

$$[z,a^2]\cdot[b^2,x]\underset{(10)}{=}-[z,b^2]\cdot[a^2,x]=-4[z\cdot b\cdot a,b]\cdot[a,x]-36z\cdot x\cdot b^2\cdot a^2\underset{(10)}{=}$$

$$4[z\cdot b\cdot a,a]\cdot[b,x]+48z\cdot b\cdot a\cdot x\cdot(b\cdot a)+36x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot b\cdot a,a]\cdot[b,x]-48z\cdot b\cdot a\cdot b\cdot(x\cdot a)-48z\cdot b\cdot a\cdot a\cdot(x\cdot b)+36x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot b\cdot a,a]\cdot[b,x]-24z\cdot a\cdot b^2\cdot(x\cdot a)+24z\cdot b\cdot a^2\cdot(x\cdot b)+36x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot b\cdot a,a]\cdot[b,x]+24z\cdot a\cdot(x\cdot a)\cdot b^2-24z\cdot b\cdot(x\cdot b)\cdot a^2+36x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot b\cdot a,a]\cdot[b,x]-12z\cdot x\cdot a^2\cdot b^2+12z\cdot x\cdot b^2\cdot a^2+36x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=4[z\cdot b\cdot a,a]\cdot[b,x]+12x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2.$$

Поэтому

$$2[z,a^2]\cdot[b^2,x]=4[(z\cdot a\cdot b+z\cdot b\cdot a),a]\cdot[b,x]+48x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=48x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. Алгебра $B=BU[x,a,b]\,Z[z]$ типа [1, 2, 2, 1] не является специальной.

Доказательство. Предположим противное, что B является подалгеброй алгебры $\overline{A}^{(+)}$, для некоторой ассоциативной алгебры A. Тогда в алгебре A имеем

$$[z,a^2]\cdot[b^2,x]=2[z,a^2]\cdot[b^2,x_0e]=2[z,a^2]\cdot[b^2\cdot x,b]=$$

$$=-2[b^2x,[z,a^2]]\cdot e=-8(x\cdot b^2)\,D_{z,a^2}\cdot e=-4z\cdot b^2\cdot z\cdot a^2+4x\cdot b^2\cdot a^2\cdot z=$$

$$=-4x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2-4x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=-8x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2.$$

Но в силу леммы 6

$$[z,a^2]\cdot[b^2,x]=24x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2.$$

Следовательно,

$$x\cdot z\cdot a^2\cdot b^2=0$$

в алгебре $JBU[x,a,b]\ \ Z[z]$. Рассмотрим отображения

$$x\to x,\quad a\to a,\quad b\to b,\quad z\to c^2.$$

По теореме 1 оно продолжается до гомоморфизма $JBU[x,a,b]\,Z[z]$ в $JBU[x,a,b,c]$. Следовательно,

$$x\cdot c^2\cdot a^2\cdot b^2=0 \text{ и } \varepsilon(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2)=0$$

в алгебре $JBU[x,a,b,c]$, что противоречит лемме 5. Теорема доказана.

Обозначим ядро алгебры $JBU[x,a,b]\,Z[z]$ через J, $J=U[x,a,b]\oplus Z[z]$. Напомним, что алгебра J типа [1, 2, 2, 1]. Следовательно, J нильпотентна индекса 7 и является гомоморфным образом $SJ_3[x,a,b,z]$, т.к. нет S-тождеств степени 7 [19].

По определению

$$SJ_3[x, a, b, z] \cong SJ[x, a, b, z]/J(SJ),$$

где $J(SJ)$ – идеал порожденный якобианами от элементов алгебры $SJ[x, a, b, z]$. Пусть

$$\hat{J}(SJ) = (J(SJ))_{Ass},$$

идеал алгебры $Ass[x, a, b, z]$, порожденный множеством $J(SJ)$.

Обозначим через $Ass[n_1, n_2, n_3, n_4]$ – F-модуль порожденный всеми элементами $Ass[x, a, b, z]$ типа $[n_1, n_2, n_3, n_4]$. Пусть M-произвольный F-подмодуль в $Ass[x, a, b, z]$. Обозначим $M_1 = M \cap Ass[1, 2, 2, 1]$. Если $w \in Ass[x, a, b, z]$, через Fw будем обозначать F-модуль порожденный w.

Лемма 7. $\hat{J}(SJ)_1 = J(SJ)_1 + F([J(a, b, z), a] \cdot [b, x])$.

Доказательство. По лемме 4 [18]

$$\hat{J}(SJ) = J(SJ) + [J(SJ), a] \cdot [b, x] + [J(SJ), a] \cdot [b, z] + [J(SJ), a] \cdot [x, z] + [J(SJ), b] \cdot [x, z].$$

Будем писать $M \equiv_J N$, где M и N некоторые F- подмодуля , если $M + N = J(SJ)$.

Тогда по тождествам (20)

$$([J(SJ), a] \cdot [b, z])_1 = F([J(x, a, b), a] \cdot [b, z])_1 \equiv_J F([J(x, a, b), a[b, z]]) =$$

$$= F(J([x, a \cdot [b, z]], a, b) + J(x, [a, a \cdot [b, z]], b) + J(x, a, [b, z])) \equiv_J$$

$$F(J([x, a \cdot [b, z], a, b])) \equiv_J = -F(J([z, a[b, x], a, b])) =$$

$$= F(J(z, [a, a \cdot [b, x]], b) + J(J, a, [b, a \cdot [b, x]]) + [J(z, a, b), a \cdot [b, x]]) \equiv$$
$$\equiv_J F([J(z, a, b), a] \cdot [b, x]).$$

Аналогично

$$([J(SJ), a] \cdot [x, z])_1 \equiv_J F([J(z, a, b), a] \cdot [b, x]),$$

$$([J(SJ), b] \cdot [x, z])_1 \equiv_J F([J(z, a, b), a] \cdot [b, x])$$

Поэтому

$$\hat{J}(SJ)_1 \subseteq J(SJ)_1 + F([J(a, b, z), a] \cdot [b, x]).$$

Обратное включение очевидно. Лемма доказана.

Теорема 4. J-специальная йорданова алгебра.

Доказательство. Пусть $J \cong SJ[x, a, b, z]/I$, где I – идеал в $SJ[x, a, b, z]$. Нетрудно заметить, что в силу определения алгебры J, I – однородный идеал. По лемме Кона [15], достаточно доказать, что

$$\hat{I} \cap SJ[x, a, b, z] = I,$$

где $\hat{I}$ – идеал алгебры $SJ[x, a, b, z]$ порожденный множеством I. Предположим противное, тогда существует однородный элемент Кона w для идеала I [20]:

$$w = \sum_i f_i(u_i, x, a, b, z) \notin I,$$

где для все i:

$u_i \in I$, $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ – ассоциативный однородный многочлен, степени 1 по x_1, симметричный относительно стандартной инволюции алгебры $Ass[x_1, x_2, \ldots, x_5]$.

Так как алгебра J нильпотентна индекса 7, то $d(w) \le 6$. В силу теоремы 1.1 [20], $d(w) > 4$. Значит $d(w) = 5$ или $d(w) = 6$. Если $d(w) = 5$, то $d(u_i) = 2$ для всех i. Но по определению алгебры J, в ней нет нетривиальных соотношений (т.е. не превышающих тип [1, 2, 2, 1]) длины 2. Поэтому $d(w) = 6$ и $d(u_i) = 3$ для всех i. Выпишем все нетривиальные соотношения длины 3 в алгебре J:

$$z \cdot a^2, \quad a \cdot b^2, \quad z \cdot (a \cdot b), \quad z \cdot (a \cdot x), \quad z \cdot (b \cdot x),$$

$$J(z, a, a), \quad J(z, b, b), \quad J(z, a, b), \quad J(z, a, x), \quad J(z, b, x),$$

$$J(x, a, a), \quad J(x, b, b), \quad J(x, a, b), \quad J(a, b, b), \quad J(b, a, a).$$

Если $u_i = z \cdot a^2$, то очевидно, что

$$f_i(u_i, x, a, b, z) \in I,$$

в силу того, что $f_i^* = f_i$. Аналогично, когда $u_i = z \cdot b^2$, $z \cdot (a \cdot x)$, $z \cdot (b \cdot x)$. Поэтому, в силу леммы 4 [18], имеем

$$w = u + v + \alpha[z \cdot (a \cdot b), a] \cdot [b, x]$$

где $u \in I$, $v \in \hat{J}(SJ)_1$, $\alpha \in F$. По лемме 7

$$v \in J(SJ)_1 + F([J(a,b,z),a]\cdot[b,x]).$$

Следовательно,

$$w = u_1 + \alpha[z\cdot(a\cdot b),a]\cdot[b,x] + \beta[J(a,b,z),a]\cdot[b,x], \tag{26}$$

где $u_1 \in J(SJ)+I$, $\beta \in F$.

Будем писать $f \equiv g$, если $f - g \in SJ[x,a,b,z]$. Тогда из (26) следует

$$S(x,a,a,b,b,z) = [(\alpha\, z\cdot(a\cdot b) + \beta J(a,b,z)),a]\cdot[b,x] \equiv 0. \tag{27}$$

Линеаризуем его по a и b

$$S(x,a_1,a_2,b_1,b_2,z) + S(x,a_2,a_1,b_1,b_2,z) + S(x,a_2,a_1,b_1,b_2,z) + S(x,a_2,a_1,b_2,b_1,z) \equiv 0.$$

Подставим в последнее соотношение $a_2 = b_2 = 1$ и получим

$$[(\alpha+3\beta)z,a]\cdot[b,x] \equiv 0.$$

Следовательно, согласно (14)

$$(\alpha+3\beta)\{zabx\} \equiv 0$$

в алгебре $Ass[z,a,b,x]$. Но $\{zabx\} \not\equiv 0$ в $Ass[z,a,b,x]$ [15, стр. 78]. Поэтому $\alpha + 3\beta = 0$ и $\beta = -\frac{1}{3}\alpha$. Откуда

$$\alpha\, z\cdot(a\cdot b) + \beta\, J(a,b,z) = \alpha\, z\cdot(a\cdot b) - \frac{1}{3}\alpha(z\cdot a\cdot b + z\cdot b\cdot a + z\cdot(a\cdot b)) =$$
$$= \frac{1}{3}(2z\cdot(a\cdot b) - z\cdot a\cdot b - z\cdot b\cdot a).$$

Теперь из (27) следует

$$\alpha[(2z\cdot(a\cdot b) - z\cdot a\cdot b - z\cdot b\cdot a),a]\cdot[b,x] \equiv 0.$$

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : Ass[x,a,b,z] \to C(f)$, где $C(f)$ – алгебра Клиффорда, продолжающий отображение

$$x \to e_1,$$

$$b \to 1+e_2,$$

$$a \to e_2+e_3,$$

$$z \to e_4.$$

Тогда

$$\varphi(2z\cdot(a\cdot b) - z\cdot a\cdot b - z\cdot b\cdot a) = 2e_4\cdot(1+e_2+e_3) - e_4\cdot(e_2+e_3)\cdot(1+e_2) -$$
$$-e_4\cdot(1+e_2)\cdot(e_2+e_3) = 2e_4,$$

и

$$2\alpha[e_4,(e_2+e_3)]\cdot[(1+e_2),e_1] \in B(f),$$

где $B(f)$ – алгебра симметрической билинейной формы f.

Имеем в алгебре Клиффорда

$$2[e_4,(e_2+e_3)]\cdot[e_2,e_1] = 2[e_4,e_2]\cdot[e_2,e_1] + 2[e_4,e_3]\cdot[e_2,e_1] \underset{(14)}{=}$$

$$\underset{(14)}{=} -2[e_4,[e_2,e_1]]\cdot e_2 + 4\{e_4e_3e_2e_1\} = 8e_1e_2e_3e_4,$$

и

$$8\alpha e_1e_2e_3e_4 \in B(f).$$

Откуда $\alpha = 0$, следовательно, и $\beta = 0$. Из (26)

$$w = u_1,$$

где $u_1 \in J(SJ)+I$. Так как $J(SJ) \subseteq I$, то $w \in I$. Получено противоречие. Теорема доказана. Объединяя результаты теоремы 3 и 4, получаем следствие:

Следствие (проблема Шестакова). Существуют неспециальные идемпотентные расширения специальных йордановых алгебр.

4. Разрешимость квадрата ниль-индекса 3 йордановой алгебры.

Пусть $N_3 = N_3[X]$ – свободная ниль-индекса 3 йорданова алгебра, тогда

$$R_{ab} = (-2)R_a\cdot R_b,$$

где $R_a\cdot R_b = \frac{1}{2}(R_aR_b + R_bR_a)$. Поэтому, если $w = w(x,y,z,\ldots)$ – однородный полилинейный многочлен в N_3 от $x, y, z, \ldots$, то

$$Rw(x,y,z,\ldots) = (-2)^{d(w)-1}w(R_x,R_y,R_z,\ldots). \tag{27}$$

Предложение 4. В алгебре N_3 выполнены тождества:

$$2\varepsilon(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\cdot x=\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right), \tag{28}$$

$$\varepsilon x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2=\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+3\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a\right). \tag{29}$$

Доказательство. Обозначим $D = D_{c^2,b^2}$, тогда

$$2\varepsilon(x\cdot a)D\cdot a\cdot x=2\varepsilon\, xD\cdot a\cdot a\cdot x+2\varepsilon\, aD\cdot x\cdot a\cdot x\underset{(3)}{=}$$

$$\underset{(3)}{=}\varepsilon\left(-xD\cdot a^2\cdot x+aD\cdot a\cdot x^2+aD\cdot x^2\cdot a\right)=$$

$$=\varepsilon\left(-\left(x\cdot a^2\right)D\cdot x+a^2D\cdot x\cdot x+\frac{1}{2}a^2D\cdot x^2+\left(x^2\cdot a\right)D\cdot a-x^2D\cdot a\cdot a\right)\underset{(2)}{=}$$

$$\underset{(2)}{=}\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D\cdot a+\frac{1}{2}x^2D\cdot a^2\right)\underset{(2)}{=}\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D\cdot a+\right.$$

$$\left.+x^2\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2\right)\underset{(2)}{=}\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right).$$

Теперь докажем тождество (29).

$$x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x=x\left\{R_x\,R_{a^2}\,R_{b^2}\,R_{c^2}\right\}=(-8)x\left\{R_x\,R_a^2\,R_b^2\,R_c^2\right\}\underset{(15)}{=}$$

$$\underset{(15)}{=}(-64)x\left(R_x\cdot R_c^2\cdot R_b^2\cdot R_a^2+\varepsilon\left(R_x\cdot R_a\right)D_{R_c^2,R_b^2}\cdot R_a\right)\underset{(27)}{=}$$

$$\underset{(27)}{=}(-64)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^6x\cdot R\left(x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2+\varepsilon(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\right)=(-1)\left(x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x+\varepsilon(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\cdot x\right)$$

.

Следовательно

$$x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+2xc^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x=-\varepsilon(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\cdot x\underset{(28)}{=}$$

$$\underset{(28)}{=}-\frac{1}{2}\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right).$$

Так как $\varepsilon^2 = 3\varepsilon$, то

$$-2\varepsilon\left(x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+2x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x\right)=3\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right).$$

Следовательно

$$\varepsilon\left(x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right)\underset{(2)}{=}2\varepsilon\left(x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x\right)+3\varepsilon\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a$$

и предложение доказано.

Пусть J-произвольная специальная ниль-индекса 3 йорданова алгебра и A ее ассоциативная обертывающая.

Лемма 8. В алгебре J выполнены тождества

$$x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2=x^2\cdot a^2\cdot c^2\cdot b^2=-\frac{1}{2}\left(x^2\cdot a^2\right)\cdot\left(b^2\cdot c^2\right), \tag{30}$$

$$(x\cdot y)\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2+x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot y+y\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x=0, \tag{31}$$

$$\varepsilon x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2=\varepsilon x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x=0. \tag{32}$$

Доказательство. Имеем в алгебре A

$$2\left\{xa^2b^2c^2\right\}\cdot x=\left\{x^2a^2b^2c^2\right\}+\left\{xa^2b^2c^2x\right\}\underset{(11),(15)}{=}$$

$$=8\left(x^2\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2+\varepsilon\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a\right)+8\left(a^2\cdot c^2\right)\cdot b^2\cdot x^2.$$

С другой стороны

$$2\left\{xa^2b^2c^2\right\}\cdot x\underset{(15)}{=}16\left(x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x+\varepsilon(x\cdot a)D_{c^2,b^2}\cdot a\cdot x\right)\underset{(17)}{=}$$

$$\underset{(28)}{=}16x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x+8\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right).$$

Таким образом

$$x^2\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2+\varepsilon\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a+\left(a^2\cdot c^2\right)\cdot b^2\cdot x^2=$$

$$=2x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x+\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x+\left(x^2\cdot a\right)D_{c^2,b^2}\cdot a-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right),$$

и

$$x^2\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2+\left(a^2\cdot c^2\right)\cdot b^2\cdot x^2=2x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x+\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right). \tag{33}$$

Применим к обеим частям равенства (33) оператор ε, тогда

$$\varepsilon x^2\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2=2\varepsilon x\cdot c^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot x+3\varepsilon\left(2x\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot x-x^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\right).$$

Откуда, в силу (2), получим

$$2\varepsilon x^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 4\varepsilon x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot x,$$

и

$$\varepsilon x^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2\varepsilon x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot x.$$

Тогда из (33) следует

$$x^2 \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + \left(a^2 \cdot c^2\right) \cdot b^2 \cdot x^2 = 2x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot x, \tag{34}$$

и, из (29)

$$\varepsilon\left(x^2 \cdot a\right) D_{c^2, b^2} \cdot a = 0.$$

Следовательно, в алгебре A

$$\left\{x^2 a^2 b^2 c^2\right\} = \left\{c^2 b^2 a^2 x^2\right\} = 8x^2 \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 = 8x^2 \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^2,$$

и в алгебре J

$$x^2 \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 = x^2 \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = -\frac{1}{2}\left(x^2 \cdot c^2\right) \cdot \left(a^2 \cdot b^2\right),$$

что доказывает тождество (30).

Из (34) и (30) следует

$$x^2 \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 + \left(a^2 \cdot c^2\right) \cdot b^2 \cdot x^2 \underset{(33)}{=} -\frac{1}{2}\left(x^2 \cdot c^2\right) \cdot \left(a^2 \cdot b^2\right) - \frac{1}{2}\left(a^2 \cdot c^2\right) \cdot \left(b^2 \cdot x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot a^2\right) \cdot \left(b^2 \cdot c^2\right) \underset{(33)}{=} -x^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \underset{(32)}{=} 2x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot x.$$

Линеаризуя последнее равенство по x, получим тождество (31)

$$(x \cdot y) \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = -x \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y - y \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot x,$$

и в силу (30), (31), имеем

$$\varepsilon x^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = \varepsilon x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot x = 0$$

Лемма доказана.

Предложение 5. В алгебре A выполнены следующие слабые тождества

$$2a^2 D_y, b \cdot (x \cdot b) \cdot y^2 = (x \cdot y) \cdot b^2 \cdot y^2 \cdot a^2, \tag{35}$$

$$4a^2 D_y, b D_{x,y} D_{y,b} = 3(xy) \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2, \tag{36}$$

$$[x, y] \cdot \left[b^2 \cdot y^2, a^2\right] = 4(x \cdot y) \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2. \tag{37}$$

Доказательство. Имеем

$$2a^2 D_{y,b} \cdot (a \cdot b) \cdot y^2 = 2a^2 \cdot y \cdot b \cdot (x \cdot b) \cdot y^2 - 2\left(a^2 \cdot b\right) \cdot y \cdot (x \cdot b) \cdot y^2 =$$

$$= -a^2 \cdot y \cdot x \cdot b^2 \cdot y^2 + 2b \cdot a^2 \cdot y^2 \cdot (x \cdot b) \cdot y \underset{(31)}{=} (x \cdot y) \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y^2 +$$

$$+ x \cdot a^2 \cdot y \cdot b^2 \cdot y^2 - 2(b \cdot y) \cdot (x \cdot b) \cdot y^2 \cdot a^2 = (xy) \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y^2 -$$

$$- x \cdot a^2 \cdot y^2 \cdot b^2 \cdot y + (xy) \cdot b^2 \cdot y^2 \cdot a^2 \underset{(31),(32)}{=} (x \cdot y) \cdot b^2 \cdot y^2 \cdot a^2;$$

т.е. (35) доказано.

Докажем тождество (36).

$$4a^2 D_{y,b} D_{x,y} D_{y,b} = 4\left(a^2 \cdot y \cdot b \cdot x \cdot y - a^2 \cdot b \cdot y \cdot x \cdot y - a^2 \cdot y \cdot b \cdot y \cdot x + a^2 \cdot b \cdot y \cdot y \cdot x\right) D_{y,b}.$$

Имеем

$$4\left(a^2 \cdot y \cdot b \cdot x \cdot y\right) D_{y,b} = 4a^2 \cdot y \cdot b \cdot x \cdot y \cdot y \cdot b - 4a^2 \cdot y \cdot b \cdot x \cdot y \cdot b \cdot y =$$

$$\underset{(3)}{=} -4a^2 \cdot y \cdot b \cdot x \cdot y^2 \cdot b - 2a^2 \cdot y \cdot b \cdot x \cdot b \cdot y^2 = 4a^2 \cdot y \cdot (b \cdot x) \cdot y^2 \cdot b +$$

$$+ 4a^2 \cdot y \cdot x \cdot b \cdot y^2 \cdot b + 2a^2 \cdot y^2 \cdot b \cdot x \cdot b \cdot y \underset{(31)}{=} -4(b \cdot y) \cdot y^2 \cdot (b \cdot x) \cdot a^2$$

$$+ 2a^2 \cdot y \cdot x \cdot b^2 \cdot y^2 + 2a^2 \cdot y \cdot x \cdot y^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot y^2 \cdot b^2 \cdot x \cdot y + a^2 \cdot y^2 \cdot x \cdot b^2 \cdot y =$$

$$= -2a^2 \cdot (x \cdot y) \cdot b^2 \cdot y^2 - 2x \cdot a^2 \cdot y \cdot b^2 \cdot y^2 - 2(x \cdot y) \cdot a^2 \cdot y^2 \cdot b^2 - x \cdot y^2 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y -$$

$$- x \cdot a^2 \cdot y^2 \cdot b^2 \cdot y - x \cdot y^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y = -2(x \cdot y) \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y^2 + 2x \cdot a^2 \cdot y^2 \cdot b^2 \cdot y - 2(x \cdot y) \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y^2 +$$

$$+ (x \cdot y) \cdot b^2 \cdot y^2 \cdot a^2 \overset{(31),(30)}{\underset{(19),(20),(21)}{=}} -4(x \cdot y) \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y^2 - 2(x \cdot y) \cdot b^2 \cdot y^2 \cdot a^2 + (x \cdot y) \cdot b^2 \cdot y^2 \cdot a^2 =$$

$$= -3(x \cdot y) \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y^2 \underset{(30)}{=} 3(x \cdot y) \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2.$$

Следовательно, $4\left(a^2 \cdot y \cdot b \cdot x \cdot y\right) = 3(xy) \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2$.

Аналогично

$$4\left(a^2\cdot b\cdot y\cdot x\cdot y\right)D_{y,b}=0,$$

$$4\left(a^2\cdot y\cdot b\cdot y\cdot x\right)D_{y,b}=-(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2,$$

$$4\left(a^2\cdot b\cdot y\cdot y\cdot x\right)D_{y,b}=(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2.$$

Поэтому

$$4a^2D_{y,b}D_{x,y}D_{y,b}=3(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2,$$

и тождество (36) доказано.

Приступим к доказательству тождества (37).

$$[x,y]\cdot\left[b^2\cdot y^2,a^2\right]\underset{(10)}{=}\frac{1}{6}[x,y]\cdot\left[[b,y]^2,a^2\right]=\frac{1}{3}[x,y]\cdot\left([b,y]\cdot\left[[b,y],a^2\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left([x,y]\cdot[b,y]\right)\cdot\left[[b,y],a^2\right]+\frac{1}{3}[b,y]\,D_{\left[[b,y],a^2\right],[x,y]}\underset{(10)}{=}8(b\cdot x)\cdot y^2\cdot\left(a^2D_{y,b}\right)+$$

$$+\frac{1}{12}\left[[b,y],\left[[b,y],a^2\right],[x,y]\right]=-8a^2D_{y,b}\cdot(x\cdot b)\cdot y^2-8a^2D_{y,b}\cdot y^2\cdot(x\cdot b)+$$

$$+\frac{16}{3}a^2D_{y,b}D_{x,y}D_{y,b}\underset{(35),(36)}{=}-4(x\cdot y)\cdot b^2\cdot y^2\cdot a^2-8a^2\cdot y\cdot b\cdot y^2\cdot(x\cdot b)+4(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2=$$

$$\underset{(30)}{=}8(b\cdot y)\cdot a^2\cdot y^2\cdot(x\cdot b)\underset{(30)}{=}-8(x\cdot b)\cdot(b\cdot y)\cdot a^2\cdot y^2=4(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2.$$

Предложение доказано.

Предложение 6. В алгебре A выполнены следующие слабые тождества

$$[x,y]\cdot\left(\left[y^2,a^2\right]\cdot b^2\right)=-20(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2, \tag{38}$$

$$\left([x,y]\cdot\left[b^2,a^2\right]\right)\cdot y^2=-8(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2. \tag{39}$$

Доказательство. Имеем

$$[x,y]\cdot\left(\left[y^2,a^2\right]\cdot b^2\right)=\left([x,y]\cdot\left[y^2,a^2\right]\right)\cdot b^2+\left[y^2,a^2\right]D_{b^2,[x,y]}\underset{(10)}{=}$$

$$\underset{(10)}{=}12\left(x\cdot y^2\right)\cdot\left(y\cdot a^2\right)\cdot b^2+4b^2D_{x,y}D_{a^2,y^2}=-12(x\cdot y)\cdot\left(y^2\cdot a^2\right)\cdot b^2+4b^2\cdot x\cdot y\cdot a^2\cdot y^2-$$

$$-4b^2\cdot y\cdot x\cdot a^2\cdot y^2+4b^2\cdot y\cdot x\cdot y^2\cdot a^2=12(x\cdot y)\cdot a^2\cdot y^2\cdot b^2-8x\cdot b^2\cdot y^2\cdot a^2\cdot y+$$

$$+4(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2-4(x\cdot y)\cdot b^2\cdot y^2\cdot a^2\underset{(19),(20)}{=}12(x\cdot y)\cdot a^2\cdot y^2\cdot b^2+8(x\cdot y)\cdot a^2\cdot y^2\cdot b^2=$$

$$\underset{(30)}{=}-20(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2,$$

т.е. тождество (38) доказано.

Имеем

$$\left([x,y]\cdot\left[b^2,a^2\right]\right)\cdot y^2=\left([x,y]\cdot\left[b^2,a^2\right]\right)\cdot y\cdot y+yD_{y,[x,y][b^2,a^2]}=$$

$$=[x,y]\cdot y\cdot\left[b^2,a^2\right]\cdot y+[x,y]\,D_{[b^2,a^2],y}\cdot y+yD_{y,[x,y][b^2,a^2]}.$$

Найдем каждое из слагаемых.

$$[x,y]\cdot y\cdot\left[b^2,a^2\right]\cdot y=\frac{1}{2}\left[x,y^2\right]\cdot\left[b^2,a^2\right]\cdot y=\frac{1}{2}\left[x,y^2\right]\cdot y\cdot\left[b^2,a^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[x,y^2\right]D_{[b^2,a^2],y}=\frac{1}{2}\left[x\cdot y,y^2\right]\cdot\left[b^2,a^2\right]+2y\,D_{a^2,b^2}D_{y^2,x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\cdot y,y^2\right]\cdot\left[b^2,a^2\right]+2yD_{a^2,b^2}\cdot y^2\cdot x-2yD_{a^2,b^2}\cdot x\cdot y^2=$$

$$\underset{(30),(31)}{=}\frac{1}{2}\left[x\cdot y,y^2\right]\cdot\left[b^2,a^2\right]-4(x\cdot y)\cdot a^2\cdot b^2\cdot y^2=\frac{1}{2}\left[x\cdot y,y^2\right]\cdot\left[b^2,a^2\right]+4(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2,$$

$$[x,y]\,D_{[b^2,a^2],y}\cdot y=4yD_{a^2,b^2}D_{y,x}\cdot y=4yD_{a^2,b^2}\cdot y\cdot x\cdot y-4yD_{a^2,b^2}\cdot x\cdot y\cdot y=$$

$$=2y^2D_{a^2,b^2}\cdot x\cdot y+2yD_{a^2,b^2}\cdot x\cdot y^2=2\left(x\cdot y^2\right)D_{a^2,b^2}\cdot y+2(xy)\,D_{a^2,b^2}\cdot y^2\underset{(30)}{=}$$

$$\underset{(30)}{=}2x\cdot y^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot y-2x\cdot y^2\cdot b^2\cdot a^2\cdot y+4(x\cdot y)\cdot a^2\cdot b^2\cdot y^2\underset{(31)}{=}$$

$$\underset{(31)}{=}-2(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2+2(x\cdot y)\cdot a^2\cdot b^2\cdot y^2-4(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2\underset{(31)}{=}-8(x\cdot y)\cdot b^2\cdot a^2\cdot y^2,$$

$$y\,D_{y,[x,y][b^2,a^2]}=\frac{1}{4}\left[y,[x,y]\cdot\left[b^2,a^2\right]\right]=\frac{1}{4}\left[y,\left[y,[x,y]\right]\cdot\left[b^2,a^2\right]\right]+\frac{1}{4}\left[y,\left[y,\left[b^2,a^2\right]\right]\cdot[x,y]\right]=$$

$$=\left[y,\left[b^2,a^2\right]\right]\cdot yD_{x,y}+\left[y,yD_{x,y}\right]\cdot\left[b^2,a^2\right]+\left[y,[x,y]\right]\cdot\left(yD_{b^2,a^2}\right)+\left[y,yD_{b^2,a^2}\right]\cdot[x,y].$$

Но $y\,D_{x,y} = x \cdot y \cdot y - y^2 \cdot x = -\frac{3}{2} y^2 \cdot x$. Поэтому

$$y\,D_{y,[x,y][b^2,a^2]} = -6\left(y\,D_{b^2,a^2}\right)\cdot\left(y^2 \cdot x\right) - \frac{3}{2}\left[y, y^2 \cdot x\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] - 6\left(y\,D_{b^2,a^2}\right)\cdot\left(y^2 \cdot x\right) +$$

$$+\left[y, y\,D_{b^2,a^2}\right]\cdot\left[x, y\right] \underset{(10)}{=} 12\left(x \cdot y^2\right) D_{b^2,a^2} \cdot y - \frac{3}{2}\left[y, y^2 \cdot x\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] - 6\left(y\,D_{b^2,a^2} \cdot x\right)\cdot y^2 =$$

$$= 12\left(x \cdot y^2\right) D_{b^2,a^2} \cdot y - 6\left(x \cdot y\right) D_{b^2,a^2} \cdot y^2 - \frac{3}{2}\left[x \cdot y, y^2\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] = 12x \cdot y^2 \cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y -$$

$$-12x \cdot y^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y - 12\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - \frac{3}{2}\left[x \cdot y, y^2\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] \underset{(19)}{=} -12\left(x \cdot y\right)\cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y^2 +$$

$$+12\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - 12\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - \frac{3}{2}\left[x \cdot y, y^2\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] =$$

$$= 12\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - \frac{3}{2}\left[x \cdot y, y^2\right]\cdot\left[b^2, a^2\right].$$

Окончательно, имеем

$$\left(\left[x, y\right]\cdot\left[b^2, a^2\right]\right)\cdot y^2 = \frac{1}{2}\left[x \cdot y, y^2\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] + 4\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - 8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 +$$

$$+12\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - \frac{3}{2}\left[x \cdot y, y^2\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] = 8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - \left[x \cdot y, y^2\right]\cdot\left[b^2, a^2\right] \underset{(13)}{=}$$

$$\underset{(13)}{=} 8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - 4\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot\left(a^2 \cdot y^2\right) + 4\left(x \cdot y\right)\cdot a^2 \cdot\left(b^2 \cdot y^2\right) \underset{(30)}{=} 8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 -$$

$$-8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - 8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = -8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2.$$

Предложение доказано.

Лемма 9. В алгебре J выполнено тождество

$$\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = 0. \tag{40}$$

Доказательство. В силу слабого тождества (37), имеем в алгебре A

$$4\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = \left[x, y\right]\cdot\left[b^2 \cdot y^2, a^2\right] = \left[x, y\right]\cdot\left(\left[b^2, a^2\right]\cdot y^2\right) + \left[x, y\right]\cdot\left(\left[y^2, a^2\right]\cdot b^2\right) \underset{(38)}{=}$$

$$\underset{(38)}{=} -20\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 + \left(\left[x, y\right]\cdot\left[b^2, a^2\right]\right)\cdot y^2 + \left[b^2, a^2\right] D_{y^2,[x,y]} \underset{(39)}{=}$$

$$\underset{(39)}{=} -20\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 - 8\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = -28\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2.$$

Следовательно $32\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = 0$ и $\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = 0$.

Лемма доказана.

Теорема 5. Пусть J-произвольная ниль-индекса 3 йорданова алгебра, тогда

$$J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \cdot J = 0, \tag{41}$$

но в общем случае $J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \neq 0$.

Если J – специальная йорданова алгебра, то

$$J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 = 0, \tag{42}$$

но в общем случае для специальных ниль-индекса 3 йордановых алгебр $J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \neq 0$.

Доказательство. Пусть J – специальная алгебра. В силу (20) и (33) имеем

$$x \cdot y^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot y = -\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = 0,$$

$$x \cdot a^2 \cdot y^2 \cdot b^2 \cdot y = -\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot y^2 \cdot a^2 \underset{(19)}{=} -\left(x \cdot y\right)\cdot b^2 \cdot a^2 \cdot y^2 = 0,$$

$$x \cdot a^2 \cdot x^2 \cdot b^2 \cdot y = 0,$$

$$x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot x^2 \cdot y = -y \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot x^2 \cdot x - \left(x \cdot y\right)\cdot x^2 \cdot b^2 \cdot a^2 = 0.$$

Поэтому

$$x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot x = -2b \cdot a^2 \cdot\left(b \cdot x\right)\cdot c^2 \cdot x = 4b \cdot a^2 \cdot\left(b \cdot x\right)\cdot\left(c \cdot x\right)\cdot c =$$

$$= -2c \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot\left(c \cdot x\right)\cdot x = 4c \cdot a^2 \cdot\left(b \cdot x\right)\cdot\left(c \cdot x\right)\cdot b.$$

Следовательно

$$2x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot x = 4\left(b \cdot a^2 \cdot\left(b \cdot x\right)\cdot\left(c \cdot x\right)\cdot c + c \cdot a^2 \cdot\left(b \cdot x\right)\cdot\left(c \cdot x\right)\cdot b\right) \underset{(10)}{=} -4\left(b \cdot c\right)\cdot\left(c \cdot x\right)\cdot\left(b \cdot x\right)\cdot a^2 =$$

$$= 2\left(b \cdot x\right)\cdot c^2 \cdot\left(b \cdot x\right)\cdot a^2 = -\left(b \cdot x\right)^2 \cdot c^2 \cdot a^2 = \frac{1}{2} x^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2.$$

С другой стороны

$$2x \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot x \underset{(20)}{=} -x^2 \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2.$$

Поэтому

$$x^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 = -2x^2 \cdot c^2 \cdot b^2 \cdot a^2 = 4x^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2,$$

т.е. $3x^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 = 0$ и $x^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^2 = 0$. Что доказывает (42).

Пусть J – произвольная ниль-индекса 3 йорданова алгебра и $A = UJ$ – универсальная мультипликативная обертывающая. Очевидно, что A – ассоциативная алгебра со слабым тождеством $x^3 = 0$. Тогда

$$R_{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} \underset{(16)}{=} (-2)^7 \left(R_a^2 \cdot R_b^2 \cdot R_c^2 \cdot R_d^2\right) \underset{(35)}{=} 0,$$

следовательно $J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \cdot J = 0$, и (41) верно.

Докажем теперь, что найденные индексы нильпотентности J^2 являются точными. Для этого рассмотрим алгебру $A[a, b, c]$ – пример ниль-индекса 3 йордановой алгебры из работы [17]. Имеем из таблицы умножения $A[a, b, c]$:

$$(a \cdot b) \cdot c^2 \cdot a^2 \cdot b^2 = e_8 \cdot e_4 \cdot e_9 \cdot e_6 = -2e_{20} \cdot e_9 \cdot e_6 = -2e_{39} \cdot e_6 = -2e_{44} \neq 0.$$

Следовательно, в общем случае $J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \cdot J^2 \neq 0$. По доказанному в теореме 4 алгебра $JBU[x, a, b]\, Z[z]$ – является специальной, а из доказательства теоремы 3 имеем

$$x \cdot z \cdot a^2 \cdot b^2 \neq 0,$$

т.е. специально в случае $J^2 \cdot J^2 \cdot J^2$ не обязано обращаться в ноль. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и леммы 4 [ ] следует, что квадрат ядра B-алгебры нильпотентен индекса 9 и разрешим индекса 4.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Шестакову, который обратил внимание автора на данные проблемы, а также ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Holgate, Genetic Algebras Satisfying Bernstein's Stationary Principle, J. London Math. Soc. (2) 9 (1975), 613–623.
2. A. Wörz-Busekros, Algebras in Genetics, Lecture Notes in Biomath. 36, Springier – Verlag, New York, 1980.
3. P. Holgate, Jordan Algebras Arising in Population Genetics. Pros. Edinburgh Math. Soc. (2) 15, 291–294 (1967).
4. A. Wörs-Busekros, Bernstein Algebras, Arch. Math. Vol. 48, 388–398 (1987).
5. Ю.И. Любич, Бернштейновские алгебры, Успехи Мат. Наук (6) 32 (198), 261–262 (1977).
6. Е.И. Зельманов, В.Г. Скосырский, Специальные йордановы ниль-алгебры ограниченного индекса, Алгебра и логика, 22, № 6 (1983), 626–635.
7. А.Н. Гришков, О генетических свойствах алгебр Бернштейна, Мат. Докл. 35 (1987), 489–492.
8. I.R. Hentrel, L.A. Peresi, Semi-Prime Bernstein Algebras, Arch. Math. 52 (1989), 539–543.

9. А.А. Крапивин, О индикаторе генетизма конечно порожденных алгебр Бернштейна, Сиб. Мат. Ж. 32 (1991), 409–415.
10. K. Odoni, A.E. Stratton, Structure of Bernstein Algebras, Cahiers Math. (Montpellier, Univ. Sci. Tech. Languedoc) 38 (1989) 117–125.
11. M. Ouattara, Sur les algebres de Bernstein qui sont des T-Algc'bres, Lin. Alg. Appl. 148 (1991), 171–178.
12. L.A. Peresi, Nilpotency in Bernstein Algebras, Arc. Math. 56 (1991), 437–439.
13. S. Walcher, Bernstein Algebras which are Jordan Algebras, Arch. Math. 50 (1988), 218–222.
14. I.R. Hentrel, D.P. Jacobs, L.A. Peresi, S.R. Svetchkov, Solvability of the Ideal of All Weight Zero Elements in Bernstein Algebras, Comm. in Alg. 22(9), 3265–3275 (1994).
15. К.А. Жевлаков, А.М. Слинько, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов, Кольца, близкие к ассоциативным, М.: Наука, 1978.
16. С.Р. Сверчков, О приведенно-свободных неспециальных йордановых алгебрах, Сиб. мат. ж., т. 30, № 1, (1989), 206–208.
17. I.R. Hentrel, D.P. Jacobs, S.R. Svetchkov, On Exceptional Nil of Index 3 Jordan Algebras, Preprint, Novosibirsk State University (1996).
18. С.Р. Сверчков, О разрешимых индекса 2 йордановых алгебрах, Мат. сб., 121, № 1 (1983), 40–47.
19. I.R. Hentrel, Special Jordan Identifies, Comm. in Alg. 7 (16), 1759–1793 (1979).
20. S.R. Sverchkov, Varieties of Special Algebras, Comm. in Alg., 16(9), 1877–1919 (1988).

Адрес автора:
Сверчков Сергей Робертович
Россия, 630090, Новосибирск-90,
ул. Пирогова – 2,
Новосибирский государственный университет.
р.т. 35-78-16
39-73-78

С.Р. Сверчков

ПРИМЕРЫ НЕСПЕЦИАЛЬНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР БЕРНШТЕЙНА

Препринт №23, 39 стр. 1997 г.

Подписано в печать 7.02.97 Формат 60x84/16
Заказ №64 Уч.-изд.л. 2.5
Тираж 100 экз.

Отпечатано на полиграфическом участке издательства
НИИ МИОО НГУ 14Б(03)
630090, Новосибирск 90, ул. Пирогова, 2