Министерство общего и профессионального
образования Российской Федерации
Новосибирский государственный университет
НИИ Математико-информационных основ обучения

Препринт №24

С.Р. Сверчков

S-сложность йордановых многообразий

Новосибирск 1997

14Б(03)

С.Р. Сверчков

S-сложность йордановых многообразий

Препринт №24, 28 с., 1997

УДК 519.48

S-сложность йордановых многообразий

С.Р. Сверчков

Пусть $\mathcal{M}$—некоторое многообразие йордановых алгебр над полем F.

Обозначим через $S\mathcal{M}$ класс всех специальных йордановых алгебр из М,

$\overline{S\mathcal{M}} = Var(S\mathcal{M})$– многообразие, порожденное всеми специальными алгебрами из $\mathcal{M}$,

$E\mathcal{M}$—многообразие всех **слабо специальных алгебр** (т. е. алгебр удовлетворяющих всем s-тождествам) из $\mathcal{M}$.

Имеем очевидную цепочку вложений

$$S\mathcal{M} \subseteq \overline{S\mathcal{M}} \subseteq E\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}.$$

Число строгих включений в цепочке назовём *s-сложностью* $\mathcal{M}$ и будем обозначать через $s(\mathcal{M})$. Число $s(\mathcal{M})$ показывает число различных типов неспециальных (т. е. не имеющих ассоциативной обёртывающей) йордановых алгебр из $\mathcal{M}$.

В п.1 будут приведены примеры йордановых многообразий $\mathcal{M}$, для которых $s(\mathcal{M}) = 0, 1, 2, 3$. Наиболее экзотично выглядят многообразия s-сложности 3, и до настоящего времени о существовании таких многообразий не было ничего известно.

Если $s(\mathcal{M}) = 3$, то строгое включение

$$S\mathcal{M} \subseteq E\mathcal{M},$$

обеспечивает наличие в многообразии $\mathcal{M}$ "внутренних" s-тождеств, т. е. таких тождеств f, что

(а). f—тождество во всех специальных алгебрах из $\mathcal{M}$

(б). f—не является тождеством в $E\mathcal{M}$

Будем называть такие тождества $s\mathcal{M}$-тождествами.

В п. 1 будут построены примеры $s\mathcal{M}$-тождеств.

Обозначим через N_3 многообразие ниль-индексов 3 йордановых алгебр.

В п. 2 будут описаны s-тождества типа $[3, 3, 1, 1]$.

В п. 3 будет построено sN_3-тождество и будет доказано, что многообразие N_3 имеет максимальную s-сложность, т. е.

$$s(N_3) = 3.$$

Все алгебры в этой статье рассматриваются над полем F, $ch(F) = 0$.

1 Примеры многообразий s-сложности $0, 1, 2, 3$.

$\underline{s(\mathcal{M}) = 0.}$

Если $s(\mathcal{M}) = 0$, то $S\mathcal{M} = \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$—специальное многообразие. В частности, если $Jord^{(2)}$—многообразие разрешимых индекса 2 йордановых алгебр, $Var(B)$—многообразие порожденное B—йордановой алгеброй симметрической билинейной формы над бесконечномерным векторным пространством над полем F, то в силу результатов [7, 9]

$$s(Jord^{(2)}) = s(Var(B)) = 0.$$

$\underline{s(\mathcal{M}) = 1.}$

Обозначим через $J[X_n]$, $SJ[X_n]$—свободную йорданову и свободную специальную йорданову алгебры от множества порождающих
$X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Пусть $\mathcal{M} = Var(J[X_2])$. Докажем, что

$$S(\mathcal{M}) = 1.$$

Действительно, в силу т. Ширшова о специальности любой двух-порожденной йордановой алгебры [5], имеем

$$\overline{S\mathcal{M}} = \mathcal{M}.$$

В силу т. Ширшова [6], алгебра $SJ[X_3]$ вложена в алгебру $J[X_2]$. В силу т. Кона [1], алгебра $SJ[X_3]$ имеет неспециальные гомоморфные образы. Поэтому

$$S\mathcal{M} \subsetneq \overline{S\mathcal{M}} \quad \text{и} \quad s(\mathcal{M}) = 1.$$

$\underline{s(\mathcal{M}) = 2.}$

Пусть $Jord$—многообразие всех йордановых алгебр. Тогда

$$SJord \subsetneq \overline{SJord} \subsetneq Jord.$$

Первое строгое включение обеспечивает пример Кона [1], второе—существование простой исключительной алгебры $H(C_3)$ [3].

Очевидно, что

$$\overline{SJord} = EJord.$$

Поэтому

$$S(Jord) = 2.$$

$\underline{s(\mathcal{M}) = 3.}$

Пусть N—рефлексивный идеал в $SJ = SJ[X]$, где $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ т. е. $N \triangleleft SJ$, такой что

$$\forall f \in N \quad \forall a, b, c \in SJ \Rightarrow \{fabc\} \in SJ.$$

Первые примеры ненулевых элементов из N были построены Е. И. Зельмановым [10]. К. Маккриммон придумал для них специальное название - элементы, “съедающие тетрадь” [11]. В. Г. Скорыский придумал простую конструкцию для построения ненулевых элементов из N [см. 14]. Для построения многообразия s-сложности 3 нам потребуется произвольный ненулевой однородный элемент из N степени ≥ 9. В силу леммы 1 [14], таковыми являются, например элементы

$$f_n = x_1 D_{[x_2,x_3]^2,x_2} D_{[x_4,x_3]^2,x_4} R_{x_5} \ldots R_{x_n},$$

где $n \geq 4$,

$$[x, y]^2 = 1/2[x^2, y, y] - [x, y, y] \cdot x = 2yDy, x^2 - 4yDy, x \cdot x.$$

Пусть $\tilde{f}$—произвольный однородный элемент из N, такой, что $\tilde{f} \neq 0$ и $d(\tilde{f}) \geq 9$. Обозначим через f произвольный однородный прообраз $\tilde{f}$ в алгебре $J[X]$, т. е.,

$$\phi(f) = \tilde{f},$$

где ϕ—канонический гомоморфизм алгебры $J[X]$ в $SJ[X]$. Пусть $\mathcal{M}$—многообразие йордановых алгебр удовлетворяющих тождеству f. Пусть $T = T(f)$—T-идеал в $J[X]$, порождённый элементом f, S—T-идеал s-тождеств $J[X]$.

Лемма 1. $\overline{S\mathcal{M}} \neq E\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $SF_{\mathcal{M}}[X]$, $EF_{\mathcal{M}}[X]$—свободные алгебры в многообразиях $\overline{S\mathcal{M}}$ и $E\mathcal{M}$—соответственно, от множества порождающих

$$X = \{x_1, \ldots, x_n \ldots\}.$$

Если $\overline{S\mathcal{M}} = E\mathcal{M}$, то очевидным образом

$$SF_{\mathcal{M}}[X] \simeq EF_{\mathcal{M}}[X].$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать, что алгебры $SF_{\mathcal{M}}[X]$ и $EF_{\mathcal{M}}[X]$ не изоморфны.

Известно [12], что $SF_{\mathcal{M}}[X]$ является подалгеброй алгебры $\prod_{\alpha\in A} J_\alpha$, где $J_\alpha \in S\mathcal{M}$ и A имеет достаточно большую мощность. Следовательно, $SF_{\mathcal{M}}[X]$—специальная йорданова алгебра. С другой стороны, по определению

$$EF_{\mathcal{M}}[X] \simeq J[X]/(T + S)$$

По первой теореме о гомоморфизмах

$$EF_{\mathcal{M}}[X] \simeq J[X]/S/(T + S/S) \simeq SJ[X]/T(\tilde{f}).$$

Из доказательства Теоремы 1 [14] следует, что алгебра $SJ[X]/T(\tilde{f})$ не является специальной. Поэтому

$$SF_{\mathcal{M}}[X] \not\simeq EF_{\mathcal{M}}[X].$$

Лемма доказана.

Пусть $g \in SJ[X]$—произвольный элемент Кона для идеала $T(\tilde{f})$, т. е.

$$g \in \hat{T}(\tilde{f}) \cap SJ[X] \quad u \quad g \notin T(\tilde{f})$$

Следствие. g является $s\mathcal{M}$-тождеством

Доказательство.

(а). g не является тождеством в $E\mathcal{M}$ в силу неспециальности алгебры $EF_{\mathcal{M}}[X]$.

(б). $g = 0$ в $S\mathcal{M}$, так как g—элемент Кона.

Следствие доказано.

Теорема 1. $s(\mathcal{M}) = 3$.

Доказательство. В многообразии $\overline{S\mathcal{M}}$ не выполняется никакое тождество нижняя степень которого ≤ 5. Следовательно, по следствию из т. 1.1 [18] следует, что —$\overline{S\mathcal{M}}$—не является специальным многообразием и

$$S\mathcal{M} \neq \overline{S\mathcal{M}}.$$

Так как $d(f) \geq 9$, то тождество Глени G_8 [2] не выполняется в $\mathcal{M}$. Следовательно,

$$E\mathcal{M} \neq \mathcal{M}.$$

В силу леммы 1

$$\overline{S\mathcal{M}} \neq E\mathcal{M}.$$

Поэтому $s(\mathcal{M})$=3.

Теорема доказана.

2 s-тождества типа $[3, 3, 1, 1]$.

Для построения sN_3-тождества нам потребуется ряд вспомогательных утверждений. Введём следующие обозначения:

$L = L[X]$—свободная алгебра Ли от множества порождающих $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$;

$G = G[X]$—F-подмодуль *простых йордановых элементов* из $SJ = SJ[X]$, т. е. наименьший F-подмодуль SJ, содержащий множество X и замкнутый относительно операторов R_x, $x \in X$;

$$< a_1, \ldots, a_n >= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)},$$

где $a_i \in Ass[X]$.

Отметим, что

$$< a, \ldots, a >= a^n,$$

$$[< a_1, \ldots, a_n >, y] = \sum_i < a_1, \ldots, [a_i, y], \ldots, a_n >, \tag{1}$$

где $y \in Ass[X]$.

На алгебре L введем естественную градуировку

$$L = L_0 + L_1,$$

где L_0 и L_1—F-подмодули порождённые элементами чётной и нечётной длины соответственно. Пусть $E = \{e_i / i \in \mathcal{A}\}$—линейно упорядоченный базис L, состоящий из одночленов, тогда по т. Биркофа-Витта

$$< e_1, \ldots, e_k >, e_i \in E, e_1 \leq \ldots \leq e_k$$

—базис алгебры $Ass = Ass[X]$. Назовём его стандартным.

Нам потребуется описание простых йордановых элементов алгебры SJ, полученное Д. Роббинсом [13]:

$$\{< e_1, \ldots, e_k >, e_i \in L_1 \cap E, e_1 \leq \ldots \leq e_k\}$$

—базис G.

Пусть A—произвольная однородная алгебра.

Обозначим:

$F(M), I_A(M)$—F-подмодуль и идеал алгебры A порожденные множеством $M \subseteq A$ соответственно;

$A(n)$—F-подмодуль A, порождённый элементами длины n;

$$u =< a, \ldots, a >_n =< \underbrace{a, \ldots, a}_{n} >,$$

число $l(u) = n$ будем называть степенью симметризованного произведения u.

Будем писать $a \in_F M$, если $a \in F(M)$.

Определим в алгебре $J = J[X]$ оператор $T_{x,y}$, где $x, y \in J$

$$zT_{x,y} = 2(xDy, z + yDx, z) = 4z(Rx \cdot y - (Rx \cdot Ry)).$$

Тогда в алгебре Ass

$$zT_{x,y} = \frac{1}{2}([z, x, y] + [z, y, x]) = z(adx \circ ady).$$

Определим действие операторов Tx, y, R_x на симметризованное произведение $< a_1, \ldots, a_n >$ в алгебре Ass.

$$\begin{aligned} < b, \ldots, b >_n T_{x,x} = n(n-1) < b, \ldots, b, [b, x], [b, x] >_n \\ + n < b, \ldots, b, bT_{x,x} >_n \end{aligned} \tag{2}$$

Действительно, в силу (1) имеем

$$\begin{gathered} [[< b, \ldots, b >_n, x], x] = n[< b, \ldots, b, [b, x] >_n, x] = \\ n(n-1) < b, \ldots, [b, x], [b, x] >_n + n < b, \ldots, b, [[b, x], x] >_n . \end{gathered}$$

В силу тождества (25), найденного в работе Д. Роббинса [13]

$$< a, \ldots, a >_n \cdot x = \sum_{i=0}^{n} b_i C_n^i < a, \ldots, a, x(ada)^i >_{n-i+1},$$

где

$$\begin{aligned} &b_0 = 0, \\ &b_{2i} = B_{2i}, i \geq 1, B_n \text{—числа Бернулли}, \\ &b_{2i+1} = 0, i \geq 1. \end{aligned}$$

Поэтому

$$< a, \ldots, a >_n \cdot x = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} B_{2i} C_n^{2i} < a, \ldots, a, xT_{aa}^i >_{n-2i+1}, \tag{3}$$

где B_{2i}—числа Бернулли. Заметим, что тождество (3) от двух порождающих, следовательно, по теореме Ширшова [5], тождество (3) выполняется в алгебре J.

Будем писать $a \equiv b$, если $a - b \in SJ$.

Лемма 2. В алгебре Ass выполнены следующие соотношения:

$$\forall a, b \in L_0 \quad a^2 \equiv b^2 \equiv 0 \quad \forall f(x_1, \ldots, x_n) \in SJ \Rightarrow$$

$$[a, x_1, \ldots, x_{2n}] \cdot a \equiv 0, \tag{4}$$

$$f(a, a, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0, \tag{5}$$

$$f(a, a, b, b, x_5, \ldots, x_n) \equiv 0, \tag{6}$$

$$f(a, [a, x], [x, y], x_4, \ldots, x_n) \equiv 0, \tag{7}$$

где $x, y \in X$.

Доказательство. Проведём индукцию по n.

(4) $n = 0, a^2 \equiv 0$.

$n = 1$, $[a, x_1, x_2] \cdot a = [[a, x_1] \cdot a, x_2] - [a, x_1] \cdot [a, x_2] \equiv \frac{1}{2}[a^2, x_1, x_2] \equiv 0$.

Пусть для всех $k < n$ соотношение (4) выполнено. Тогда

$[a, x_1, \dots, x_{2n}] \cdot a = [[a, x_1, \dots, x_{2n-2}] \cdot a, x_{2n-1}, x_{2n}] - [a, x_1, \dots, x_{2n-2}] \cdot [a, x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv -[a, x_1, \dots, x_{2n-2}] \cdot [a, x_{2n-1}, x_{2n}] = -[a', x_{2n-3}, x_{2n-2}] \cdot [a, x_{2n-1}, x_{2n}]$,

где $a' = [a, x_1, \dots, x_{2(n-2)}]$.

Очевидно, что

$a' \in L_0$, $a' = [e, x_{2(n-2)}]$, где $e \in L_1$.

Поэтому $a'^2 \equiv 0$.

По предположению индукции

$$a' \cdot a \equiv 0.$$

Следовательно,

$$(a' + a)^2 \equiv 0.$$

Следовательно,

$[a', x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}] \cdot a \equiv -[a, x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}] \cdot a'$.

Обозначим

$x = x_{2n-3}$, $y = x_{2n-2}$, $z = x_{2n-1}$, $t = x_{2n}$.

Тогда, в силу доказанного:

$$[a', x, y, z, t] \cdot a \equiv -[a', x, y] \cdot [a, z, t] \equiv [a, x, y] \cdot [a', z, t] \equiv -[a', z, t, x, y] \cdot a.$$

Но

$[a', [x, y], z, t] \cdot a = [a', [[x, y], z], t] \cdot a + [a', z, [x, y], t] \cdot a \equiv [a', z, [[x, y], t]] \cdot a + [a', z, t, [x, y]] \cdot a \equiv [a', z, t, [x, y]] \cdot a$.

Поэтому

$$[a', [x, y], z, t] \cdot a \equiv [a', x, [y, z], t] \cdot a \equiv [a', x, y, [z, t]] \cdot a \equiv 0.$$

Следовательно,

$[a', x, y, z, t] \cdot a \equiv [a', z, t, x, y] \cdot a \equiv -[a', z, t, x, y] \cdot a$, и $[a', x, y, z, t] \cdot a \equiv 0$, что доказывает соотношение (3).

(5). Достаточно доказать, что

$$f_n = a \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a \equiv 0. \tag{8}$$

Индукция по n:

$n = 0$, $a^2 \equiv 0$.

$n = 1$, $a \cdot x_1 \cdot a = a^2 \cdot x_1 + \frac{1}{4}[a, [x_1, a]] \equiv 0$.

Пусть для всех $k < n$ соотношение (8) выполнено. Тогда

$$a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot a = a \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot a \cdot x_n + \frac{1}{4}[a \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}, [x_n, a]] \equiv$$

$$\frac{1}{4}(a \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-2}) \cdot [x_{n-1}, [x_n, a]] \equiv \frac{1}{4^2}(a \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-3}) \cdot [x_{n-2}, [x_{n-1}, [x_n, a]]]) \equiv$$

$$\frac{1}{4^2}(a \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-4}) \cdot [x_{n-3}, [x_{n-2}, [x_{n-1}, [x_n, a]]]].$$

Поэтому

$$f_n \equiv \begin{cases} \frac{1}{4^k}[a, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] \cdot a, & n = 2k, \\ \frac{1}{4^{k+1}}[a, [x_1, [a, x_n, \dots, x_2]]], & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Но
$[a, x_n, \ldots, x_1] \cdot a \equiv 0$, $(n = 2k)$ в силу (3),

$u = [a, [x_1, [a, x_n, \ldots, x_2]]] \equiv 0$, $(n = 2k+1)$, т. к. $u \in L_1$.

Таким образом соотношение (7), а следовательно, (4) доказаны.

(5). Пусть
$a = l(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$,
где l—многочлен Ли. Тогда из соотношения (4) следует, что
$f(a, a, b, b, x_5, \ldots, x_n) \equiv g(b, b, x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}, x_5, \ldots, x_n) \equiv 0$,
где $g(x_1, \ldots, x_{n+m-2})$—йордановый многочлен.
(7). Имеем

$$[a, x] \cdot [x, y] = j(a, x, y),$$

где

$$j(x_1, x_2, x_3) \in SJ.$$

Следовательно, из соотношения (4) следует, что
$f(a, [a, x], [x, y], x_4, \ldots, x_n) \equiv g(a, a, x, y, x_4, \ldots, x_n) \equiv 0$,

где

$$g(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in SJ.$$

Лемма доказана.

Для построения sN_3-тождества нам потребуется описание всех s-тождеств типа $[3, 3, 1, 1]$. Для этого мы найдём некоторые порождающие F-подмодулуй $SJ(6)$, $SJ(7)$, $SJ(8)$ элементов типа $[3, 3, 1, 1]$.

Далее запись

$$M =_F f(\underbrace{x, \ldots, x}_{n} \ldots, \underbrace{e, \ldots, e}_{m})$$

будет означать, что

$$M =_F \frac{1}{n!} \cdots \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_n, \tau \in S_m} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots, e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(m)}),$$

где $x_1, \ldots, x_n, \ldots \in X$, $e_1, \ldots, e_m \in L_1$.

Лемма 3. В алгебре SJ :

$$SJ(6) =_F K(6), \quad SJ(7) =_F K(7), \quad SJ(8) =_F K(8),$$

где

$$\begin{aligned} K(6) = \; & \{< x, \ldots, x >_6, \\ & < e, \ldots, e >_4, \\ & e^2, \\ & < x, x, [y, z], [y, z] >, \\ & [e, z]^2, \\ & [[x, y], z, t] \cdot [x, y]\}, \end{aligned}$$

где суммарная длина каждого элемента равна 6;

$$\begin{aligned} K(7) = \; & \{< x, \ldots, x >_7, \\ & < e, \ldots, e >_i \; (i = 5, 3, 1), \\ & < x, x, x, [y, z], y, z] >, \\ & < e_1, [e_2, x], [e_2, x] >, \\ & < x, [z, y], [z, y, t, a] >, \\ & < [x, y], [z, t], [x, y, z] >\}, \end{aligned}$$

где суммарная длина каждого элемента равна 7;

$$\begin{aligned} K(8) = \; & \{< x, \ldots, x >_8, \\ & < e, \ldots, e >_i \; (i = 6, 4, 2), \\ & < x, x, x, x, [y, z], [y, z] >, \\ & < x, x, [y, z], [y, z, t, a] >, \\ & < e_1, e_1, [e_2, x], [e_2, x] >, \\ & [e, x]^2, \\ & [x, y] \cdot [x, y, z, t, a, b], \\ & < x, [y, z], [y, z, t], [t, a] >, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&[x,y]\cdot[x,y,z,t,a,b],\\
&<x,[y,z],[y,z,t],[t,a]>\\
&<[x,y],[x,y],[z,t],[z,t]>,\\
&[e,x,y,z]\cdot[e,x],\\
&[x,y,a,b]\cdot[x,y,z,t],\\
&[a,[x,y],[x,y,t]]\cdot[z,t],\\
&[a,[x,y,t],[x,y]]\cdot[z,t]\},
\end{aligned}
$$

где суммарная длина каждого элемента равна 8.

Доказательство. Известно [6], что алгебра умножений $R(J[X])$ порождается множеством операторов $\{R_x, R_{x\cdot y} | x,y \in X\}$.
Т. к.

$$R_{x\cdot y} = \frac{1}{4}T_{x,y} + R_x \cdot R_y,$$

то алгебра $R(J[X])$ порождается множеством операторов $\{R_x, T_{x,y} | x,y \in X\}$.
Очевидно, что

$$SJ(2) =_F x^2.$$

Поэтому замыкая $SJ(2)$ относительно действия $R_x, T_{x,y}$, где $x,y \in X$, используя тождества (2) и (3), найдём порождающие $SJ(6)$, $SJ(7)$, $SJ(8)$.

$$SJ(3) = SJ(2)R_y \subseteq_F (<x,x,x>, e).$$

$$
\begin{aligned}
SJ(4) = SJ(3)R_y + SJ(2)T_{y,y} \subseteq_F \ &(<x,x,x,x>_4, e^2,\\
&[x,y]^2).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SJ(5) = SJ(4)R_z + SJ(3)T_{y,y} \subseteq_F \ &(<x,\ldots,x>_5,\\
&<e,e,e>_3,\\
&e,\\
&<z,[x,y],[x,y]>).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SJ(6) = SJ(5)R_t + SJ(4)T_{z,z} \subseteq_F \ &(<x,\ldots,x>_6,\\
&<e,e,e>_4,\\
&e^2,\\
&<z,t,[x,y],[x,y]>,\\
&[[x,y],z,t]\cdot[x,y],\\
&[e,t]^2).
\end{aligned}
$$

$$SJ(7) = SJ(6)R_a + SJ(5)T_{t,t},$$

где

$$
\begin{aligned}
SJ(6)R_a \subseteq_F \ &(<x,\ldots,x>_7,\\
&<e,\ldots,e>_5,\\
&<e,\ldots,e>_3,\\
&e,\\
&<a,z,t,[x,y],[x,y]>,\\
&<e,[x,y],[x,y]>,\\
&<[x,y],[e,y],z>,\\
&<z,[x,y],[[x,y],a,t]>),
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
SJ(5)T_{t,t} \subseteq_F \ &(<e,\ldots,e>_5,\\
&<x,\ldots,x,[x,t],[x,t]>_5,\\
&<e,e,e>_3,\\
&<e,[e,t],[e,t]>,\\
&e,\\
&<[z,t],[[x,y],t],[x,y]>).
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$SJ(7) \subseteq_F K(7).$$

Наконец,

$$SJ(8) = SJ(7)R_b + SJ(6)T_{a,a}.$$

$$
\begin{aligned}
SJ(7)R_b \subseteq_F \ & (< x, \dots, x >_8, \\
& < e, \dots, e >_i \ (i = 6,4,2), \\
& < x, x, x, x, [y,z], [y,z] >, \\
& < e, e, [x,y], [x,y] >, \\
& < x, x, [e,y], [e,y] >, \\
& < x, x, [y,z,t,a], [y,z] >, \\
& [x,y] \cdot [e,y], \\
& [x,y] \cdot [x,y,z,t,a,b], \\
& < a, [x,y], [x,y,t], [z,t] >, \\
& [z,t] \cdot [a, [x,y], [x,y,t]], \\
& [z,t] \cdot [a, [x,y,t], [x,y]]),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
SJ(6)T_{a,a} \subseteq_F \ & (< e, \dots, e >_i \ (i = 6,4,2), \\
& < e, e, [x,y], [x,y] >, \\
& < x, x, [e,y], [e,y] >, \\
& [e,x]^2, \\
& < [x,y], [x,y], [z,t], [z,t] >, \\
& < x, [y,z], [y,z,t], [t,a] >, \\
& [x,y] \cdot [x,y,z,t,a,b], \\
& [x,y,a,b] \cdot [x,y,z,t], \\
& [e,x,y,z] \cdot [e,x]).
\end{aligned}
$$

Следовательно, $SJ(8) \subseteq_F K(8)$.

В силу соотношений (5), (6), (7) все элементы входящие в $K(6)$, $K(7)$, $K(8)$ являются йордановыми, поэтому $SJ(6) =_F K(6)$, $SJ(7) =_F K(7)$, $SJ(8) =_F K(8)$.

Лемма доказана.

Найдем теперь базисы

$$\bar{K}(6), \quad \bar{K}(7), \quad \bar{K}(8)$$

–F-подмодулей $SJ(6)$, $SJ(7)$, $SJ(8)$. Для этой цели необходимо найти линейно независимые элементы в F-подмодулях.

$$E^2(K) = SJ(K) \cap F(E^2), \quad k = 6,7,8,$$

где

$$E^2 = \{e_i \cdot e_j | e_i, e_j \in L_0\}.$$

Для этого зафиксируем базис E—базис Ширшова [8] свободной алгебры Ли:

$$
\begin{aligned}
& x > y > z > t \\
& e_i = [u_i, v_i, w_i], u_i > v_i, [u_i, v_i] > w_i, v_i \leq w_i,
\end{aligned}
$$

где $u_i, v_i, w_i \in E$ и уже определены индукцией по длине.

Элементы множества E будем называть *коммутаторами Ширшова.*

Для любого F-модуля M в алгебре $Ass[x,y,z,t]$, через $M[n_1,n_2,n_3,n_4]$ будем обозначать F-подмодуль в M элементом тип которых лексикографически не превосходит $[n_1,n_2,n_3,n_4]$.

Лемма 4. В алгебре Ass выполнены слежующие соотношения:

$$\forall w \in F(E^2)[3,3,1,1] \ \ \exists l(w) \in L_0[x,y],$$

что

$$w \equiv [z,t] \cdot l(w), \tag{9}$$

$$[z,t] \cdot l(w) \equiv 0 \ \ \Rightarrow l(w) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Соотношение (9) достаточно доказать для $w \in E^2$, тип$(w) \leq [3,3,1,1]$.

Если $d_z(w) = 0$ или $d_t(w) = 0$, то $w \equiv 0$ в силу теоремы Ширшова-Кона [6]. Поэтому считаем, что

$$d_z(w) = d_t(w) = 1.$$

Рассмотрим все возможные случаи. В силу тождеств (5)-(8) имеем: $d(w) = 4$.

Очевидно, что

$$w \equiv [z,t] \cdot [x,y].$$

$d(w) = 6$.

Тогда

$[x,y]\cdot[x,y,\ldots]\equiv 0,$

$[x,y]\cdot[z,t,\ldots]\equiv 0,$

$[x,y]\cdot[x,z,\ldots,t]\equiv-[x,z]\cdot[x,y,\ldots,t]\equiv[z,t]\cdot[x,y,\ldots],$

$[x,z]\cdot[y,t,\ldots,y]\equiv-[x,y]\cdot[y,t,\ldots,z]\equiv[t,y]\cdot[y,x,\ldots,z]\equiv[z,t]\cdot[y,x,\ldots,y].$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

$d_t(w)=8.$

Случай $d(l_i)=2$, $d(l_j)=6$ рассматривается аналогично, как для $d(w)=6$. Пусть $d(l_i)=d(l_j)=4$,

$[x,y,y,z]\cdot[y,x,x,t]\equiv 0$

$[x,z,t,x]\cdot[x,y,x,y]\equiv-[y,x]\cdot[x,[x,z,t],x,y]\equiv 0,$

$[x,z,y,x]\cdot[x,y,x,t]\equiv-[y,x]\cdot[x,[x,z,y],x,t]=$

$=-[x,y]\cdot[x,z,y,x,x,t]\equiv[x,z]\cdot[x,y,y,x,x,t]\equiv$

$\equiv[z,t]\cdot[x,y,y,x,x,x].$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично. Докажем соотношение (10). Для этого рассмотрим алгебру $B=F\cdot 1+V$—йорданову алгебру симметричной билинейной формы $f:V\times V\to F$, где V—бесконечномерное векторное пространство над F. Через $C=C(f)$ обозначим алгебру Клиффорда формы f. Известно [6], что $C(f)$—универсальная ассоциативная обёртывающая для алгебры B. Выберем в алгебре B стандартный базис $b_i, i=1,\ldots,$ с таблицей умножения:

$$b_i\cdot b_j=\delta_{ij}.$$

Будем писать $a\equiv_B b$ в алгебре C, если $a-b\in B$. Предположим, что

$$[z,t]\cdot l(w)\equiv 0, \qquad (11)$$

где $l(w)\in L_0[x,y]$. Если $l(w)$ не является слабым тождеством в алгебре $C(f)$, то при некоторой подстановке $x=x_0,\ \ y=y_0,\ \ x_0,y_0\in B$

$$l(w(x_0,y_0))=c\neq 0,$$

где $c\in C$.

Положим $z=b_{i0},\ \ t=b_{j0}$, где b_{i0},b_{j0} не входят в запись элемента c в алгебре C. Тогда

$$[z,t]_0\cdot l(w(x_0,y_0))=b_{i0}b_{j0}c\not\equiv_B 0,$$

что противоречит предположению. Следовательно, если

$$[z,t]\cdot l(w)\equiv 0,$$

то $l(w)$—слабое тождество в C. Очевидно, что [x,y], [x,y,y,x], [x,y,x,x] не являются слабыми тождествами алгебры C. Поэтому для w длины 4 и 6 соотношение (10) выполнено. Рассмотрим случай $d(w)=8$. Выпишем все коммутаторы Ширшова длины 8:

$$a_1=[x,y,y,y,x,x],$$

$$a_2=[x,y,x,[x,y,y]],$$

$$a_3=[x,y,y,y,[x,y]],$$

Предположим, что соотношение (11) выполнено. Тогда в силу доказанного

$$l(w)=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\alpha_3a_3,\quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in F,$$

—слабое тождество в алгебре C. Не трудно заметить, что a_3—слабое тождество в C. Следовательно,

$$\alpha_1a_1+\alpha_2a_2=0$$

—слабое тождество в C. Докажем что $\alpha_1=\alpha_2=0$.

Прежде всего заметим, что можно считать, что элементы x и y имеют нулевой след. Поэтому

$[x,y,y,y,x,x]=4[yD_{y,x},y,x,x]=4[x,y,x,x]\cdot y^2=$

$=16[xD_{y,x},x]\cdot y^2=16[x,y]\cdot(x^2\cdot y^2),$

$[x,y,x,[x,y,y]]=16[xDy,x,yD_{y,x}]=$

$=16[(x\cdot y)\cdot x-x^2\cdot y,\ y^2\cdot x-x\cdot y\cdot y]=16[x,y]\cdot(x^2\cdot y^2-(x\cdot y)^2).$

Поэтому, в алгебре C

$$[x,y]\cdot((\alpha_1+\alpha_2)x^2\cdot y^2-\alpha_2(x\cdot y)^2)=0. \qquad (12)$$

Подставив в тождество (12):

1. $x=e_1$, $y=e_2$. Тогда

$$2(\alpha_1+\alpha_2)e_1e_2=0\ \ \Rightarrow\ \ \alpha_1+\alpha_2=0.$$

2. $x = e_1 + e_2$, $y = e_2$. Тогда

$$-2\alpha_2 e_1 e_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0.$$

Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Таким образом,

$[z_1 t] \cdot l(w) \equiv 0$, где $l(w) = \alpha[[x_1 y, y, x, [x_1 y]]$.

В силу соотношений (4), (5) имеем в алгебре C

$$[z,t] \cdot [x,y,y,x,[x,y]] \underset{B}{\equiv} -[x,t] \cdot [z,y,y,x,[x,y]] - [z,y] \cdot [x,t,y,x,[x,y]] \underset{B}{\equiv}$$
$$\underset{B}{\equiv} [x,y] \cdot [z,y,y,x,[x,t]] + [x,y] \cdot [x,t,y,x,[z,y]] = 4[x,y] \cdot ([yD_{y,z}, x, [x,t]]+$$
$$+[yD_{t,x}, x, [z,y]] \underset{B}{\equiv} 4[x,y] \cdot ([z,x,[x,t]] \cdot y^2 - [y,x,[x,t] \cdot (y \cdot z)-$$
$$-[t,x,[z,y]] \cdot (x \cdot y)) \underset{B}{\equiv} 4[x,y] \cdot ([z,x,x,t] \cdot y^2 + [t,x,y,z,] \cdot (x \cdot y)) =$$
$$= 16[x,y] \cdot ([xD_{x,z}, t] \cdot y^2 + [yD_{x,t}, z] \cdot (x \cdot y)) \underset{B}{\equiv} 16[x,y] \cdot ([z,t] \cdot x^2 \cdot y^2-$$
$$-[x,t] \cdot (x \cdot z) \cdot y^2 + [t,z] \cdot (x \cdot y)^2 - [x,z] \cdot (t \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \underset{B}{\equiv}$$
$$\underset{B}{\equiv} 16[x \cdot y] \cdot [z,t] \cdot (x^2 \cdot y^2 - (x \cdot y^2)).$$

Следовательно,

$$\alpha[x,y] \cdot [z,t] \cdot (x^2 \cdot y^2 - (x \cdot y)^2) \underset{B}{\equiv} 0.$$

Положим $x = e_1$, $y = e_2$, $z = e_3$, $t = e_4$, тогда

$$4\alpha e_1 e_2 e_3 e_4 \underset{B}{\equiv} 0.$$

Следовательно, $\alpha = 0$. **Лемма доказана.**

Следствие. Пусть элемент w удовлетворяет условиям леммы 4 и $d_z(w) + d_t(w) = 2$, тогда существует единственный элемент $l(w) \in L_0[x,y]$, что

$$w \equiv [z,t] \cdot l(w).$$

Доказательство. Пусть

$$w \equiv [z,t] \cdot l_1(w) \equiv [z,t] \cdot l_2(w),$$

где $l_1(w), l_2(w) \in L_0[x,y,]$.

Тогда

$$[z,t] \cdot (l_1(w) - l_2(w)) \equiv 0.$$

Откуда, в силу соотношения (10), $l_2(w) - l_2(w) = 0$ и $l_1(w) = l_2(w)$. **Следствие доказано.**

Далее коммутаторы Ширшова четной длины будем обозначать через f_i, нечетной длины - через e_i, $i = 1, 2....$ На множестве $\{f_i, e_i / i \in N\}$ - сохраним тот же порядок, что был в E. Для простоты изложения, базис $\{f_i, e_i / i \in N\}$ будем обозначать той же буквой E.

Приступим к построению $\bar{K}(6)$, $\bar{K}(7)$, $\bar{K}(8)$ - базисов F-подмодулей $SJ(6)$, $SJ(7)$, $SJ(8)$.

Лемма 5. В алгебре SJ

$$\begin{array}{ll}\bar{K}(6) = & \{\langle e, ..., e\rangle_i, \quad i = 2,4,6; \\ & \langle \underbrace{e, e,}_{i} f_j, f_k\rangle, \quad \textit{где} \quad f_j \cdot f_k \equiv 0, \quad i = 0, 2; \\ & \langle \underbrace{e, e,}_{i} f_j, f_k \langle - \langle \underbrace{e, e,}_{i} [z,t], e(f_j \cdot f_k)\rangle, \ \textit{где} \ f_j \cdot f_k \not\equiv 0, \ i = 0, 2; \end{array}$$

суммарная длина каждого элемента равна 6},

$$\begin{array}{ll}\bar{K}(7) = & \{\langle e, ..., e\rangle_i, \quad i = 1,3,5,7; \\ & \langle \underbrace{e, e, e,}_{i} f_j, f_k\rangle, \quad \textit{где} \ f_j \cdot f_k \equiv 0, \ i = 3 \ \textit{либо} \ i = 1 \ \textit{и} \ d(e) = 1; \\ & \langle \underbrace{e, e, e}_{i} f_j, f_k\rangle - \langle \underbrace{e, e, e,}_{i} [z,t], e(f_i \cdot f_k)\rangle, \ \textit{где} \quad f_j \cdot f_k \not\equiv 0, \quad i = 3 \\ & \textit{либо} \quad i = 1 \quad \textit{и} \quad d(e) = 1; \\ & \langle e, f_i, f_j\rangle, \ d(e) = 3; \end{array}$$

суммарная длина каждого элемента равна 7},

$$\begin{array}{ll}\bar{K}(8) = & \{\langle e, ..., e\rangle_i, \quad i = 2,4,6,8; \\ & \langle \underbrace{e, ..., e,}_{i} f_j, f_k\rangle, \quad \textit{где} \quad f_j \cdot f_k \equiv 0, \quad i = 4, 0 \quad \textit{либо} \\ & i = 2 \quad \textit{и} \quad d(e_1) = d(e_2) = 1; \\ & \langle \underbrace{e, ..., e,}_{i} f_j, f_k\rangle - \langle \underbrace{e, ..., e,}_{i} [z,t], e(f_j \cdot f_k)\rangle, \quad \textit{где} \ f_j \cdot f_k \equiv 0, \\ & i = 4, 0 \quad \textit{либо} \quad i = 2 \quad \textit{и} \quad d(e_1) = 3; \\ & \langle e_1, e_2, f_j, f_k\rangle, \quad d(e_1) = 3; \\ & \langle [x,y], [x,y], f_i, f_j\rangle, \quad \textit{где} \ f_i \cdot f_j \equiv 0; \\ & \langle [x,y], [x,y], f_i, f_j\rangle - \langle [x,y], [x,y], [z,t], e(f_i \cdot f_j)\rangle, \quad \textit{где} \ f_i \cdot f_j \not\equiv 0; \end{array}$$

суммарная длина каждого элемента равна 7}.

Доказательство. Докажем сначала, что

$w = \langle e, f_i, f_j\rangle \equiv 0$, где $d(e) = 3$, $d(w) = 7$;

$v = \langle e_1, e_2, f_i, f_j\rangle \equiv 0$, где $d(e_1) = 3$, $d(w) = 8$.

Если $f_i \cdot f_j \equiv 0$, то в силу соотношения (5) $w \equiv v \equiv 0$.

Пусть $f_i \cdot f_j \not\equiv 0$. Рассмотрим все возможные случаи, при этом будем пользоваться тождеством (5), (7).

$$\langle [x,y,x],[x,y],[z,t]\rangle \equiv -\langle [x,y,x],[x,z],[y,t]\rangle \equiv$$
$$\equiv \langle [t,y,x],[x,z],[y,x]\rangle \equiv 0,$$

$$\langle [x,y],[z,t],x,[x,y,y]\rangle \equiv -\langle [x,z],[y,t],x,[x,y,y]\rangle \equiv$$
$$\equiv \langle [x,y],[y,t],x,[x,z,y]\rangle \equiv 0.$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

Очевидно, что все остальные элементы $\bar{K}(6)$, $\bar{K}(7)$, $\bar{K}(8)$ являются йордановыми. В силу следствия из леммы 4, соотношения (9) и вида стандартного базиса, имеем

$$K(i) \subseteq_F \bar{K}(i);$$

$\bar{K}(i)$ - состоит из линейно независимых элементов, $i = 6,7,8$.

Лемма доказана.

Применим к полученному базису принцип s-тождеств.

Представим элементы $\bar{K}(i)$, $i = 6,7,8$ в йордановой записи, т.е., выразим их через операции SJ: " $+$ ", " $\circ$ ". Обозначим эти элементы через $w_k(i)$, $k = 1,2,...$; $i = 6,7,8$. Из леммы 5 следует, что множество $\{w_k(i),\ k = 1,2,..;\ i = 6,7,8\}$ - базис $SJ[3,3,1,1]$. Зафиксируем этот базис. Определим отображение

$$\varphi:\ SJ[3,3,1,1] \to J[3,3,1,1]$$

следующим образом

$$\varphi(w_k(i)) = \langle w_k(i)\rangle_S,$$

где $\langle w_k(i)\rangle_S$ - элемент, полученный из $w_k(i)$ заменой операции " $\circ$ " алгебры SJ на операцию " $\cdot$ " алгебры J. Продолжим отображения φ линейным образом на все пространство $SJ[3,3,1,1]$.

Пусть S - T-идеал s-тождеств в алгебре J.

Теорема 2. $S[3,3,1,1] \underset{F}{=} W$, где

$$W = \{\langle w_k(6)\rangle_S T_a, b - \langle w_k(6)T_{a,b}\rangle_S,$$
$$\langle w_k(7)\rangle_S R_a - \langle w_k(7)R_a\rangle_S,$$

где $a,b \in \{x,y,z,t\}$, тип $(w_k(6)T_{a,b}) =$ тип $(w_k(7)R_a) = [3,3,1,1]$, $k = 1,2,...\}$.

Доказательство. Непосредственным образом следует из теоремы Хенделя [4], леммы 5 и принципа построения s-тождеств, полученного в [15]. **Теорема доказана.**

Замечание. Алгоритм построения элементов множества W определяется тождествами (2), (3) и доказательствами леммы 2 и 4.

Обозначим через $T = T(g_8)$ - T-идеал алгебры J порожденный тождеством Глени, через $J(J)$ - T-идеал алгебры J порожденный Якобианами. Отметим, что из доказательства теоремы 1 [16] следует, что

$$T = T(x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot x \cdot y) + J(J). \qquad (13)$$

Лемма 6. $W \subseteq T$.

Доказательство сводится к рассмотрению всех элементов из W. Будем писать $f \underset{g}{\equiv} h$, для $f,h \in J$, если $f - h \in T$. Отметим, что если $w = w(z,t,x,x,x,y,y,y) \in W$, что в силу теоремы 2 [15]

$$w(z,t) \underset{g}{\equiv} w(t,z), \qquad (14)$$

$$w(z,x,x,x) \underset{g}{\equiv} -w(x,z,x,x) - w(x,x,z,x) - w(x,x,x,z).$$

Заметим, что если

$$\langle w_i(6)\rangle_S T_{a,b},\ \ \langle w_i(7)\rangle_S R_a \in F\langle W\rangle_S + T, \qquad (15)$$

то

$$\langle w_i(6)\rangle_S T_{a,b} - \langle w_i(6)T_{a,b}\rangle_S \underset{g}{\equiv} 0,$$
$$\langle w_i(7)\rangle_S R_a - \langle w_i(7)R_a\rangle_S \underset{g}{\equiv} 0.$$

Действительно, пусть выполнено соотношение (15), тогда

$$\langle w_i(6)\rangle_S T_{a,b} = \sum_k \alpha_k \langle w_k(8)\rangle + u,$$

где $\alpha_k \in F$, $u \in T$.

$$\langle w_i(6)T_{a,b}\rangle_S = \sum_k \beta_k \langle w_k(8)\rangle,$$

где $\beta_k \in F$.

Рассмотрим канонический гомоморфизм $\psi : J \to SJ$.

Очевидно, что $\psi\langle w_k(8)\rangle_s = w_k(8)$ для всех k. Поэтому, в силу теоремы 2,

$\psi(\langle w_i(6)\rangle_s T_{a,b} - \langle w_i(6) T_{a,b}\rangle_s) =$
$= \sum_k (\alpha_k - \beta_k) w_k(8) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_k = \beta_k$ для всех k.

Следовательно,

$$\langle w_i(6)\rangle_s T_{a,b} \underset{g}{\equiv} \langle w_i(6) T_{a,b}\rangle_s.$$

Аналогично рассматривается случай $\langle w_i(7)\rangle_s R_a$. Будем писать $u \cong v$, если $u - v \in F\langle W\rangle_s + T$.

Таким образом, достаточно доказать, что $W \cong 0$. Приступим к рассмотрению всех возможных случаев:

В силу (14)

$$\langle\langle e, ..., e\rangle_i\rangle_s T_{z,t} \cong 0;$$

$$\langle\langle e, ..., e\rangle_6\rangle_s T_{a,b} \cong 0.$$

Далее,

$$\langle\langle x, x, y, [x, z, y]\rangle\rangle_s T_{y,t} \cong -\tfrac{1}{2}\langle\langle x, x, t, [x, z, y]\rangle\rangle_s T_{y,y} -$$
$$-\tfrac{1}{2}\langle\langle x, x, y, [x, z, t]\rangle\rangle_s T_{y,y} \cong \tfrac{1}{6}\langle\langle x, x, x, [t, z, y]\rangle\rangle_s T_{y,y} +$$
$$+\tfrac{1}{2}\langle\langle x, x, y, [x, t, z]\rangle\rangle_s T_{y,y}.$$

В силу тождества (2), имеем в алгебре SJ

$$\langle x, x, x, [z, t, y]\rangle T_{y,y} = 6\langle x, [x, y], [x, y], [z, t, y]\rangle +$$
$$+6\langle x, x, [x, y,], [z, t, y, y]\rangle + \langle x, x, x[z, t, y, y]\rangle. \qquad (16)$$

Заметим, что $[z, t, y], [z, t, y, y], [z, t, y, y, y]$ - коммутаторы Ширшова и $[x, y] \cdot [z, t, y, y] \equiv 0$.

В силу леммы 2

$$\langle x, [x, y], [x, y], [z, t, y]\rangle = f_1([z, t, y], x, y),$$

$$\langle x, x, [x, y], [z, t, y, y]\rangle = f_2([z, t, y], x, y),$$

где

$$f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3) \in SJ[x_1, x_2, x_3].$$

Следовательно, тождество (16) имеет вид

$$\langle x, x, x, e\rangle T_{y,y} = f(e, x, x, x, y, y),$$

где f - йордановый многочлен степени $5, e = [z, t, y]$. Поэтому по теореме Хенделя [4], тождество (16) выполняется и в алгебре J. Т.е.

$$\langle x, x, x, [z, t, y]\rangle_s T_{y,y} = 6\langle x, [x, y], [x, y], [z, t, y]\rangle_s +$$
$$+6\langle x, x, [x, y], [z, t, y, y]\rangle_s + \langle x, x, x, [z, t, y, y, y]\rangle_s.$$

Аналогично,

$$\langle\langle x, x, y, [x, t, z]\rangle\rangle_s T_{y,y} \cong 0.$$

Таким образом

$$\langle\langle x, x, y, [x, z, y]\rangle\rangle_5 T_{y,y} \cong 0.$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично. **Лемма доказана.**

3 s-сложность многообразия ниль-индекса 3 йордановых алгебр.

Теорема 3. $x^2 \cdot y^2 \cdot (z \cdot x) \cdot (t \cdot y)$ - является sN_3 - тождеством.

Доказательство. В силу теоремы 5 [17]

$$x^2 \cdot y^2 \cdot (z \cdot x) \cdot (t \cdot y) = 0$$

во всякой специальной ниль-индекса 3 йордановой алгебре. Предположим, что алгебра $SJ_3[x, y, z, t]$ является специальной, тогда в алгебре $SJ[x, y, z, t]$ будем иметь тождество вида

$$f = x^2 \cdot y^2 \cdot (z \cdot x) \cdot (t \cdot y) + w = 0, \qquad (17)$$

где $w \in J(SJ[x, y, z, t])$.

Рассмотрим алгебру A, построенную в [16]. Подставим $x = a$, $y = b$, $z = t = c$ в (17), тогда

$$f(a, b, c, c) = a^2 \cdot b^2 \cdot (c \cdot a) \cdot (c \cdot b) = -2e_{26} \cdot e_7 \cdot e_5 =$$

$$= -2e_{40} \cdot e_5 = e_{44} \neq 0.$$

Следовательно, $f(x, y, z, t)$ - обычное s-тождество. Очевидно, что оно имеет тип [3,3,1,1]. В силу леммы 6 f является следствием g_8. Поэтому $f \in T$. Тогда в силу (13), (17), в алгебре $J_3 = J_3[x, y, z, t]$

$$x^2 \cdot y^2 \cdot (z \cdot x) \cdot (t \cdot y) \in T(x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot x \cdot y).$$

Нетрудно заметить, что в алгебре J_3 F-подмодуль $T(x^2\cdot y^2\cdot z^2\cdot x\cdot y)$ элементов типа [3,3,1,1] порождается одним элементом $x^2\cdot y^2\cdot(z\cdot t)\cdot x\cdot y$. Таким образом, в алгебре J_3 выполнено тождество

$$x^2\cdot y^2\cdot(z\cdot x)\cdot(t\cdot y)=\alpha x^2\cdot y^2\cdot(z\cdot t)\cdot x\cdot y, \qquad (18)$$

где $\alpha\in F$.

Рассмотрим тождество (18) в алгебре A из [16]. Подставим $x=a$, $y=b$, $z=t=c$ и получим

$$e_{44}=\alpha a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot a\cdot b=-2\alpha e_{26}\cdot e_4\cdot e_1\cdot e_2=$$

$$=4\alpha e_{37}\cdot e_1\cdot e_2=4\alpha e_{42}\cdot e_2=-2\alpha e_{44}.$$

Следовательно, $\alpha=-\frac{1}{2}$.

Поэтому в алгебре $U(J_3)$ выполнено тождество

$$2RyRx^2\cdot y^2\cdot(z\cdot x)+RzR_{x^2\cdot y^2}RxRy=0,$$

или

$$-2\cdot 2^5Ry(Rx^2\cdot Ry^2\cdot(Rz\cdot Rx))+4Rz(Rx^2\cdot Ry^2)RxRy=0.$$

В силу естественного гомоморфизма:

$$U(SJ_3[x,y,z])\to A(SJ_3[x,y,z]),$$

где $A(J)$ - универсальная ассоциативная обертывающая для J. Получим в алгебре $A_3=A(SJ_3[x,y,z])$:

$$16y(x^2\cdot y^2(z\cdot x))=z(x^2\cdot y^2)xy. \qquad (19)$$

Полностью повторяю доказательство леммы 8 [16], нетрудно доказать, что тождество (19) не выполнено в A_3. Получено противоречие.

Следовательно,

$SJ_3[x,y,z,t]$ - не является специальной йордановой алгеброй, и

$x^2\cdot y^2\cdot(z\cdot x)\cdot(t\cdot y)\neq 0$ в алгебре $SJ_3[x,y,z,t]$.

Поэтому

$x^2\cdot y^2\cdot(z\cdot x)\cdot(t\cdot y)$ является sN_3- тождеством.

Теорема доказана.

Следствие 1. $S(N_3)=3$.

Доказательство. Из теоремы 1 и 2 [16] и доказанного следует, что

$$SN_3\subsetneqq S\bar{N}_3\subsetneqq EN_3\subsetneqq N_3.$$

Следствие доказано.

Многообразие йордановых алгебр назовем S-многообразием, если оно содержится в многообразии $\overline{Spec}$.

В теореме 1 [14] доказано, что свободная алгебра рагна 3 любого S-многообразия специальна. Следствие 2 показывает, что этот ранг нельзя увеличить.

Следствие 2. Существуют S- многообразия в которых свободная алгебра ранга 4 неспециальна.

Доказательство. Рассмотрим S-многообразия $\mathcal{M}=V_{ar}(SJ_3[x,y,z,t])$ Из теоремы 3 следует, что алгебра $SJ_3[x,y,z,t]$ не является специальной. **Следствие доказано.**

Отметим еще один любопытный факт.

Алгебра $SJ_3[x,y,z,t]$ типа [3,2,1,1]— специальная йорданова алгебра, а типа [3,3,1,1]—не является специальной.

ЛИТЕРАТУРА.

1. P.M.Cohn, On homomorphic images of special Jordan algebras, Canad. J.Math. 6, 1954, 253-264.

2. C.M. Glennie, Some identities valid in special Jordan algebras but not valid in all Jordan algebras, Pacific J. Math. 16, N 1, 1966, 47-59.

3. A.A. Albert, L.J. Paige, On a homomorphism property of a certain Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 93, 1959, 20-29.

4. I.R.Hentzel, Special Jordan identities, Comm. in Alg., 7(16), 1979, 1759-1793.

5. А.И. Ширшов, О специальных J- кольцах, Мат. Сборник, 38, N 2, 1956, 149-166.

6. К.А. Жевлаков, А.М. Слинько, И.П. Шестаков, А.И. Ширшов, Кольца близкие к ассоциативным. М, Наука 1978.

7. С.Р. Сверчков, Специальные многообразия йордановых алгебр, препринт N 34, ИМ СО РАН СССР, Новосибирск, 1983.

8. А.И. Ширшов, О свободных кольцах Ли, Матем. сб., 45, N 2, 1958, 113-122.

9. С.Р. Сверчков, О разрешимых индекса 2 йордановых алгебрах, Матем. Сб., 121, N 1, 1983, 40-47.

10. Е.И. Зельманов, Йордановы алгебры с делением, Алгебра и логика, т.18, N 3, 1979, 286-311.

11. K. McCrimmon, The Russian Revolution in Jordan Algebras, Algebra, Group, Geom., V. 1, 1984, 1-64.

12. А.И. Мальцев, Алгебраические системы, М., Наука, 1969.

13. D.P. Robbins, Jordan Elements in a Free Associative Algebra, J. Algebra, 19, N 3, 1971, 354-374.

14. С.Р. Сверчков, О приведенно-свободных неспециальных йордановых алгебрах, Сиб. мат. ж., 30, N 1, 1989, 206-209.

15. С.Р. Сверчков, Йордановы s-тождества от трех переменных, препринт N 20, НИИ МИОО, Новосибирский госуниверситет, 1996.

16. I. Hentzel, D. Jacobs, S. Sverchkov, on Exceptional Nil of Index 3 Jordan Algebras, препринт N 21, НИИ МИОО, Новосибирский госуниверситет, 1996.

17. С.Р. Сверчков, Примеры неспециальных йордановых алгебр Бернштейна, препринт N 23, НИИ МИОО, Новосибирский государственный университет, 1996.

18. S. Sverchkov, Varieties of Special Algebras, Comm. in Algebra, 16(9), 1988, 1877-1919.

Адрес автора:
Сверчков Сергей Робертович
Россия,
630090, Новосибирск-90,
ул. Пирогова -2,
Новосибирский государственный университет.

С.Р. Сверчков

S-сложность
йордановых многообразий

Препринт №24, 28 стр. 1997 г.

Подписано в печать 19.03.97 Формат 60x84/16
Заказ №73 Усл.- печ. л. 1.75
Тираж 100 экз.

Отпечатано на полиграфическом участке издательства
НИИ МИОО НГУ 14Б(03)
630090, Новосибирск 90, ул. Пирогова, 2