НИЖЕГОРОДСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

На правах рукописи

Кириллов Сергей Альбертович

УДК 512.554.31

СЭНДВИЧЕВЫ ПОДАЛГЕБРЫ В ПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

01.01.06. - математическая логика, алгебра
и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико - математических наук

Научный руководитель
к.ф.- м.н., доцент
Кузнецов М.И.

Нижний Новгород - 1992

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

1. В последнее время одной из основных проблем теории алгебр Ли конечной характеристики является проблема классификации конечномерных простых алгебр Ли (модулярных алгебр Ли) [18]. А.А.Премет [28] доказал гипотезу А.И.Кострикина [17], согласно которой все конечномерные простые алгебры Ли над полем K характеристики $p > 3$ делятся на два класса. К первому классу относятся все алгебры Ли классического типа A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, получающиеся редукцией по $\mathrm{mod}\, p$ из комплексных простых алгебр Ли [2]. Второй класс состоит из так называемых алгебр Ли с сильным вырождением. По определению, алгебра L обладает сильным вырождением тогда и только тогда, когда в L найдется элемент $C\neq 0$, для которого $(\mathrm{ad}\, C)^2 = 0$.

Первый пример неклассической алгебры Ли был построен в 30-х годах Э.Виттом. После этого было приведено много новых примеров таких алгебр [36], [40], [44] (подробная библиография имеется в книге [47]). Позднее, А.И.Кострикиным и И.Р.Шафаревичем [20],[21], была предложена общая конструкция построения неклассических простых конечномерных алгебр Ли, обобщенная Р.Вильсоном [53] и В.Г.Кацем [3]. А.И.Кострикин и И.Р.Шафаревич заметили, что бесконечномерные алгебры Ли формальных векторных полей имеют конечномерные аналоги над полем K, которые или являются простыми алгебрами, или очень мало отличаются от простых. Эти алгебры, названные алгебрами Ли картановского типа, представляют собой четыре бесконечные серии - общих, специальных, гамильтоновых и контактных алгебр. Заменой кольца формальных степенных рядов в случае поля K положительной характеристики служит алгебра разделенных степеней $\mathcal{O}(E)$ над конечномерным пространством E [21], а точнее - пополненная по стандартной фильтрации алгебра $\hat{\mathcal{O}}(E)$. Алгебра $\mathcal{O}(E)$ содержит конечномерные подалгебры $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$, соответствующие флагам $\mathfrak{F}$ в пространстве E. Алгебры $W(\mathfrak{F})$, $\tilde{S}(\mathfrak{F})$, $\tilde{H}(\mathfrak{F})$ и $\tilde{K}(\mathfrak{F})$ состоят из специальных дифференцирований алгебры $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$ и характеризуются действием на дифференциальные формы - объема, гамильтоновой и контактной структуры. Сами алгебры $\tilde{S}(\mathfrak{F})$, $\tilde{H}(\mathfrak{F})$, $\tilde{K}(\mathfrak{F})$ не всегда просты, но содержат идеалы $S(\mathfrak{F}) \subset \tilde{S}(\mathfrak{F})$, $H(\mathfrak{F}) \subset \tilde{H}(\mathfrak{F})$, $K(\mathfrak{F}) \subset \tilde{K}(\mathfrak{F})$, являющиеся простыми градуированными алгебрами. Наряду с градуированными алгебрами рассматриваются также их фильтрованные деформации $\mathcal{L}$: $S(\mathfrak{F}) \subseteq gr\,\mathcal{L} \subseteq \tilde{S}(\mathfrak{F})$ или $H(\mathfrak{F}) \subseteq gr\,\mathcal{L} \subseteq \tilde{H}(\mathfrak{F})$ *). Здесь $gr\,\mathcal{L}$ - ассоциированная градуированная алгебра, соответствующая фильтрованной алгебре $\mathcal{L}$.

А.И.Кострикиным и И.Р.Шафаревичем была высказана гипотеза, относительно которой любая простая конечномерная алгебра Ли, обладающая сильным вырождением, над полем характеристики $p \geqslant 7$ является алгеброй Ли картановского типа. В настоящее время эта гипотеза доказана Р.Блоком и Р.Вильсоном [42], [43] для случая ограниченных алгебр Ли (p-алгебр). Классификация Блока-Вильсона основана на классическом подходе к проблеме, состоящем в рассмотрении корневого разложения алгебры L относительно подалгебры Картана. Значительных успехов в доказательстве классификационной гипотезы Кострикина-Шафаревича достигли Г.Бенкарт,Дж.Осборн и Х.Штраде [37] -[52], использующие технику Блока-Вильсона, заменив при этом подалгебру Картана тором максимальной размерности в p-оболо-

---

*) Алгебры $W(\mathfrak{F})$ и $K(\mathfrak{F})$ нетривиальных фильтрованных деформаций не имеют (см. [23], [30] и [54]).

чке алгебры L. Программа классификации простых алгебр, предложенная А.И.Кострикиным [18], отличается от подхода Блока-Вильсона. Одним из основных моментов данной программы является способ выбора максимальной подалгебры L_0 в произвольной неклассической алгебре Ли L. В зависимости от выбранной подалгебры L_0, в алгебре L возникают фильтрации разной длины. Для того, чтобы получить достаточно длинную фильтрацию в L хотелось бы использовать некоторые естественные конструкции. В частности, в любой алгебре Ли L с сильным вырождением отлично от нуля множество $C(L) = \{ C \in L \mid (\mathrm{ad}\, C)^2 = 0 \}$, замкнутое относительно операции коммутирования Это множество порождает нильпотентную подалгебру $\mathfrak{C}(L)$ в L, инвариантную относительно группы автоморфизмов алгебры L. Подалгебру $\mathfrak{C}(L)$ будем называть сэндвичевой*). В обзоре [17] А.И.Кострикин высказал гипотезу о том, что нормализатор $\mathcal{N}(\mathfrak{C}(L))$ является максимальной подалгеброй в любой неклассической простой алгебре Ли L над K. Поэтому, естественно было бы выбирать в качестве максимальной подалгебры L_0 нормализатор $\mathcal{N}(\mathfrak{C}(L))$, который мог бы дать длинную фильтрацию в L, инвариантную относительно всех автоморфизмов алгебры L. Однако в общем случае эта гипотеза остается пока не доказанной.

В.А.Крекнин [22] доказал, что стандартная максимальная подалгебра L_0 в простых алгебрах Ли картановского типа инвариантна относительно Aut L. Согласуя это с гипотезой А.И. Кострикина, естественно предположить, что $L_0 = \mathcal{N}(\mathfrak{C}(L))$ для этих алгебр. В частных случаях это равенство было получено

---

*) Сэндвичевы алгебры появились в связи с решением ослабленной проблемы Бернсайда [19].

А.И.Кострикиным и И.Р.Шафаревичем [21] для p-алгебр Ли, а затем Г.О.Эльстингом [33], [34], [35] для градуированных алгебр Ли картановского типа. Доказательство последнего равенства для всех известных простых алгебр Ли и является основной темой диссертации.

Всюду в работе рассматривается алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 3$. Вообще, поля небольшой характеристики в теории алгебр Ли занимают особое место. Так, над полем характеристики $p = 3$ возникает целое семейство попарно неизоморфных 10-мерных алгебр Ли [16], а над полем характеристики $p = 5$ Г.М.Меликяном [26], [27] построена 125-мерная простая p-алгебра Ли "квазиконтактного" типа. На самом деле построена целая серия алгебр размерности 5^n, но при $n > 3$ они не являются ограниченными. Эти алгебры в дальнейшем мы будем называть алгебрами Меликяна и обозначать через $L(m_1,m_2)$. Алгебры Меликяна являются неклассическими алгебрами Ли и неизоморфны ни одной из алгебр картановского типа. Поскольку алгебры Меликяна существуют лишь при $p = 5$, то становится понятным ограничение на характеристику ($p > 5$) в основной классификационной гипотезе. В данной работе также исследована сэндвичева подалгебра $\mathfrak{C}$ в алгебрах Меликяна $L(m_1,m_2)$ и проверена гипотеза о максимальности нормализатора $\mathcal{N}(\mathfrak{C})$.

В.Г.Кац в работе [4] установил связь между фильтрованными деформациями алгебр Ли картановского типа и дифференциальными формами. Таким образом, задача о нахождении классов (изоморфизмов) специальных, гамильтоновых и контактных алгебр Ли была сведена к описанию орбит соответствующих дифференциальных форм. Классификация форм объема была проведена С.А.Тюриным [32] и Р.Вильсоном [56], классификация гамильтоновых и контактных форм в простейшем случае получена автором и М.И.Кузнецовым [24], [25], а общий случай разобран С.М. Скрябиным [29],[31] и независимо группой авторов [39]. Полученный в этих работах канонический вид форм объема и гамильтоновых дифференциальных форм позволяет найти множества образующих алгебр $S(\mathfrak{F},\omega)$ и $H(\mathfrak{F},\omega)$, а также подсчитать их размерности, что и сделано в настоящей работе. Необходимо отметить, что в частном градуированном случае этот результат получен в работе [21].

2. Диссертация состоит из пяти глав. Нулевая глава по-существу является вводной и содержит лишь предварительные сведения, используемые в последующих главах. Все утверждения главы сформулированы без доказательств. В §1 даются основные определения, в §2-4 собраны необходимые сведения об алгебрах $S(\mathfrak{F})$, $H(\mathfrak{F})$ и $K(\mathfrak{F})$, в §5 дано описание сэндвичевой подалгебры в ограниченных алгебрах Ли картановского типа, в §6 описано строение алгебр Меликяна, полученное М.И.Кузнецовым [46], наконец, §7 содержит очевидные вспомогательные утверждения, которые будут использованы в главах 2-4.

Первая глава диссертации основана на работах [6], [7]. В §1-2 рассматривается алгебра $S(\mathfrak{F},\omega)$ и доказывается утверждение о том, что элементы вида $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) = \mathfrak{D}_{ij}(a) + a\,\varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(\varphi)$, где $\mathfrak{D}_{ij}(a) = \partial_i a\, \partial_j - \partial_j a\, \partial_i$, $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, а $\varphi = 1$, $1 + x_1^{(p^{m_1}-1)} \ldots x_n^{(p^{m_n}-1)}$ или $\exp x_t$ (в зависимости от формы ω), порождают алгебру $S(\mathfrak{F},\omega)$, причем $\dim S(\mathfrak{F},\omega)$ равна $(n-1)(p^m-1)$, если $\varphi \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, и $-(n-1)p^m$, если $\varphi \notin \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Случай $\varphi = 1$, как уже отмечалось выше, рассматривался в работе [21]. В §3-4 подробно описывается строение алгебры $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$. В §5-6 доказывается теорема, согласно которой алгебра $H(\mathfrak{F},\omega)$ натянута на элементы $\bar{\mathfrak{D}}_a = \sum_{i,j} \bar{\omega}_{ji}(\partial_j a + a\,\partial_j v)\partial_i$, где $a \in B(\mathfrak{F})$, $\omega = \exp v \sum_{i,j} \omega_{ji}\, dx_i \wedge dx_j$ – гамильтонова дифференциальная форма, $(\bar{\omega}_{ij}) = (\omega_{ij})^{-1}$, причем $\dim H(\mathfrak{F},\omega) = p^m$, $p^m - 1$ или $p^m - 2$ (в зависимости от формы ω и n). Р.Вильсон [55] показал, что $L(\mathfrak{F},\omega) = \tilde{L}(\mathfrak{F},\omega)^{(r)}$ (здесь $L = S$ или H, а $L^{(r)}$ обозначает r-й коммутант алгебры L) для достаточно больших r. Затем С.М.Скрябин [30] доказал, что $r = 1$ для $L = S$ и $r = 2$ для $L = H$. Простое сравнение размерностей $\dim \tilde{L}(\mathfrak{F},\omega)$, $\dim \tilde{L}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$ и $\dim \tilde{L}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$, полученных в первой главе данной работы, дает точный ответ на вопрос : в каком случае в качестве $L(\mathfrak{F},\omega)$ нужно брать первый коммутант алгебры $\tilde{L}(\mathfrak{F},\omega)$, в каком – второй и в каком случае сама алгебра $\tilde{L}(\mathfrak{F},\omega)$ является простой.

Вторая глава посвящена исследованию сэндвичевой подалгебры $\mathfrak{C}(L)$ в алгебрах $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$, $K(\mathfrak{F})$. Основу этой главы составляют работы [10] и [14]. Как уже отмечалось, сэндвичева подалгебра в ограниченных алгебрах Ли картановского типа была найдена А.И.Кострикиным и И.Р.Шафаревичем [21]. М.И.Кузнецов заметил, что для ограниченных алгебр Ли картановского типа $L = S$, H выполняется равенство $\mathfrak{C}(L) = \mathfrak{C}(W) \cap L$. Естественно было предположить, что аналогичное равенство выполняется для всех алгебр Ли картановского типа. Известно, что алгебра $O(\mathfrak{F})$ изоморфна алгебре срезанных многочленов $O_m = K[y_1,\ldots,y_m]/(y_1^p,\ldots,y_m^p)$, поэтому любая алгебра Ли L картановского типа вкладывается в алгебру $W_m = \operatorname{Der} O_m$. В §1 сформулирована основная теорема, в силу которой $\mathfrak{C}(L) = \mathfrak{C}(W_m) \cap L$, для $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ и $K(\mathfrak{F})$ (кроме случая $n + 1 \equiv 0 \pmod p$). Кроме того, в §1 собраны технические утверждения необходимые для доказательства этой теоремы. В §2-5 содержится доказательство основной теоремы. Непосредственным следствием основной теоремы является равенство $L_0 = \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$, где L_0 - нулевой член стандартной фильтрации в алгебре L. Доказательство этого равенства содержится в §6.

В третьей главе рассматривается сэндвичева подалгебра $\mathfrak{C}(L)$ в алгебрах Меликяна $L = L(m_1, m_2)$. Согласно [46], алгебра Меликяна L является алгеброй Ли типа G_2 и имеет градуировку по mod 3 : $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}} \oplus L_{\bar{2}}$, где $L_{\bar{0}} = W(\mathfrak{F})$ (при $n = 2$), $L_{\bar{1}} = \mathcal{O}(\mathfrak{F})\omega^{-1/3}$, $L_{\bar{2}} = W(\mathfrak{F})\omega^{1/3}$, а $\omega = dx_1 \wedge dx_2$. В §1 сформулированы вспомогательные леммы и теорема, относительно которой $\mathfrak{C}(L) = \mathfrak{C}(W(\mathfrak{F})) \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} L_{\bar{1}} \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} L_{\bar{2}}$, где $\mathfrak{M}$ - максимальный идеал в $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Доказывается эта теорема в §2-3. Из теоремы легко получается равенство $L_0 = \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$, где L_0 - нулевой член стандартной фильтрации типа G_2 в L. §4 содержит доказательство последнего равенства. Таким образом, из результатов глав 2-3 следует, что гипотеза А.И.Кострикина о нормализаторе сэндвичевой подалгебры верна для всех известных к настоящему времени неклассических простых алгебр Ли при $p > 3$.

В четвертой, заключительной главе вычисляется класс нильпотентности сэндвичевых алгебр, описанных в предыдущих двух главах. Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{C}$ называется нильпотентной класса нильпотентности N, если $\mathfrak{C}^N \neq 0$, а $\mathfrak{C}^{N+1} = 0$, где $\mathfrak{C}^N = [\mathfrak{C}^{N-1}, \mathfrak{C}]$. В §§1,3-6 доказывается, что для алгебр $W(\mathfrak{F})$ при $n \geqslant 2$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ при $p > 5$, $K(\mathfrak{F})$ при $p > 5$ и $L(m_1,m_2)$ класс нильпотентности сэндвичевой подалгебры равен $N = 2m - 1$, в §2 определяется класс нильпотентности алгебры $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$ при $n = 1$, который имеет сложную зависимость от характеристики основного поля и находится в пределах : $m \leqslant N \leqslant 2m - 1$.

Результаты диссертации докладывались на XIX-й Всесоюзной алгебраической конференции (Львов, 1987), IV-й Всесоюзной школе "Алгебры Ли и их применение в математике и физике" (Казань, 1990), Международной конференции по алгебре памяти А.И.Ширшова (Барнаул, 1991), XVI-й Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах (Нижний Новгород, 1991), Итоговых научных конференциях ННГУ, а также обсуждались на семинарах ННГУ и МГУ, и опубликованы в работах [5]-[15].

Глава 0. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Настоящая глава является вводной и содержит лишь определения и результаты, которые будут использованы в последующих главах. Все утверждения этой главы сформулированы без доказательств.

§ 1. Определение алгебр Ли картановского типа

Напомним определение картановских алгебр Ли (см. [21], [4], [41] и [55]). Всюду в дальнейшем (если не оговорено противное) $\mathcal{K}$ - алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 3$, E - конечномерное векторное пространство над $\mathcal{K}$. Алгебра разделенных степеней $\mathcal{O}(E)$ задается образующими $x^{(h)}$, $x \in E$, $h \in \mathbb{Z}$, $h \geqslant 0$, и определяющими соотношениями

$$1)\quad (x + y)^{(h)} = \sum_{t=1}^{h} x^{(t)}y^{(h-t)},$$

$$2)\quad (\lambda x)^{(h)} = \lambda^h x^{(h)},\quad \lambda \in \mathcal{K},$$

$$3)\quad x^{(h)}x^{(t)} = \begin{pmatrix} h+t \\ t \end{pmatrix} x^{(h+t)},$$

$$4)\quad x^{(0)} = 1.$$

Алгебра $\mathcal{O}(E)$ имеет бесконечное число образующих $x_i^{(p^t)}$, где $\{ x_1,\ldots,x_n \}$ - некоторый базис пространства E, $t \geqslant 0$. Эти образующие удовлетворяют единственному соотношению :

$$\left[x_i^{(p^t)} \right]^p = 0.$$

Равенства $\deg x^{(h)} = h$, $x \in E$, определяют градуировку в $\mathcal{O}(E)$

$$\mathcal{O}(E) = \sum_{t \geqslant 0} \mathcal{O}(E)_{[t]}.$$

Пополнив $\mathcal{O}(E)$ по соответствующей фильтрации, получим полную фильтрованную алгебру $\hat{\mathcal{O}}(\mathrm{E})$. Всякий элемент из $\hat{\mathcal{O}}(\mathrm{E})$ записывается в виде $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$, где $u_i \in \mathcal{O}(\mathrm{E})_{[i]}$. Определим экспоненту формулой

$$\exp u = \sum_{i=0}^{\infty} u^{(i)},$$

где $u \in \sum_{i\geqslant 1} \mathcal{O}(\mathrm{E})_{[i]}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – флаг в пространстве E вида

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 \supsetneq \mathrm{E}_1 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathrm{E}_k \supset 0.$$

Флагу $\mathfrak{F}$ соответствует подалгебра в алгебре разделенных степеней $\mathcal{O}(\mathrm{E})$, порожденная элементами $x^{(p^i)}$, $x \in \mathrm{E}_i$. Эту алгебру мы будем обозначать символом $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Ввиду конечности флага, она имеет конечную размерность над полем $\mathcal{K}$. Легко заметить, что алгебра $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$ натянута на мономы

$$x^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha_1)} \ldots x_n^{(\alpha_n)}, \qquad 0 \leqslant \alpha_i < p^{\mathrm{m}_i}, \qquad 1 \leqslant \mathrm{m}_1 \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{m}_n.$$

По-существу, от флага $\mathfrak{F}$ здесь остался лишь упорядоченный набор целых положительных чисел $\{\mathrm{m}_1, \ldots, \mathrm{m}_n\}$, называемых *высотами* переменных. Если $\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 + \ldots + \mathrm{m}_n$, то, очевидно, $\dim_{\mathcal{K}} \mathcal{O}(\mathfrak{F}) = p^{\mathrm{m}}$. Алгебра $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$ градуирована :

$$\mathcal{O}(\mathfrak{F}) = \bigoplus_{i=0}^{r+1} \mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[i]},$$

где $\mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[i]} = \mathcal{O}(\mathfrak{F}) \cap \mathcal{O}(\mathrm{E})_{[i]}$ и $r + 1 = \sum_{i=1}^{n} (p^{\mathrm{m}_i} - 1)$. Для дальнейшего полезно ввести обозначения : $\bar{x}_i = x_i^{(p^{\mathrm{m}_i}-1)}$, $e_{\mathfrak{F}} = \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$, $\mathcal{O}'(\mathfrak{F}) = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[i]}$.

Общая алгебра Ли картановского типа $\mathrm{W}(\mathfrak{F})$*) состоит из всех дифференцирований алгебры $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$ вида $\mathfrak{D} = \sum_i f_i \partial_i$, где

---

*) В случае $\mathrm{n} = 1$ алгебру $\mathrm{W}(\mathfrak{F})$ называют также *алгеброй Цассенхауза* и обозначают через $\mathrm{W}(\mathrm{m})$, где $\mathrm{m} = \mathrm{m}_1$.

$f_i \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, с обычной операцией коммутирования операторов. Из определения непосредственно вытекает, что $\dim_K W(\mathfrak{F}) = n\, p^m$. Пространства

$$W(\mathfrak{F})_{[k]} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[k+1]}\partial_i$$

определяют в алгебре $W(\mathfrak{F})$ стандартную градуировку.

Пусть $\Omega^0(\mathfrak{F}) = \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, $\Omega^1(\mathfrak{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(\mathfrak{F})}(W(\mathfrak{F}),\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$ и $\Omega^s(\mathfrak{F}) = \Lambda^s\Omega^1(\mathfrak{F})$ - s-я внешняя степень $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$-модуля $\Omega^1(\mathfrak{F})$. Для $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$ элемент $df \in \Omega^1(\mathfrak{F})$ определяется равенством

$$(df)(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}f, \qquad \mathfrak{D} \in W(\mathfrak{F}).$$

Очевидно, что элементы $dx_{i_1}\Lambda\ldots\Lambda\, dx_{i_s}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$ составляют свободный базис $\Omega^s(\mathfrak{F})$ над $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Кольцо $\Omega(\mathfrak{F}) = \bigoplus_{s\geqslant 0}\Omega^s(\mathfrak{F})$ является градуированной алгеброй над $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$, в которой определен дифференциал $d\colon \Omega(\mathfrak{F}) \longrightarrow \Omega(\mathfrak{F})$, продолжающий дифференциал d с $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Любое дифференцирование $\mathfrak{D} \in W(\mathfrak{F})$ может быть единственным образом продолжено на $\Omega(\mathfrak{F})$ как дифференцирование этой алгебры перестановочное с дифференциалом d. Таким образом, для любой дифференциальной формы $\omega \in \Omega^s(\mathfrak{F})$ определена форма $\mathfrak{D}\,\omega \in \Omega^s(\mathfrak{F})$, причем

1) $\mathfrak{D}(df) = d(\mathfrak{D}f)$, $\quad \forall\, f \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$;

2) $\mathfrak{D}(f\omega) = \mathfrak{D}(f)\omega + f(\mathfrak{D}\,\omega)$;

3) $\mathfrak{D}(\omega_1 \Lambda\, \omega_2) = \mathfrak{D}\,\omega_1 \Lambda\, \omega_2 + \omega_1 \Lambda\, \mathfrak{D}\,\omega_2$.

Если теперь коэффициенты дифференциальных форм рассматривать из $\hat{\mathcal{O}}(E)$, то получим градуированную алгебру $\hat{\Omega}(E) = \bigoplus_{s=0}^{n}\hat{\Omega}^s(E)$.

Дифференциальную форму $\omega \in \hat{\Omega}^n(E)$ называют *формой объе-*

ма, если

$$\omega = \varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}(E)$, $\varphi(0) \neq 0$. Дифференциальную форму $\omega \in \hat{\Omega}^2(E)$ называют *гамильтоновой формой*, если

$$\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j,$$

где $\Omega = (\omega_{ij})$ - кососимметрическая матрица из $\mathrm{Mat}_n(\hat{\mathcal{O}}(E))$, $\det \Omega(0) \neq 0$ и $d\omega = 0$. Наконец, дифференциальную форму $\omega \in \hat{\Omega}^1(E)$ вида

$$\omega = dx_n + \sum_{i=1}^{n'} (x_i dx_{n'+i} - x_{n'+i} dx_i)$$

называют *контактной формой* (здесь $n = 2n' + 1$).

Определим следующие три серии алгебр Ли.

1) Алгебра $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$ состоит из всех $\mathfrak{D} \in W(\mathfrak{F})$, для которых $\mathfrak{D}\,\omega = 0$, где ω - форма объема, а $n > 2$.

2) Алгебра $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ состоит из всех $\mathfrak{D} \in W(\mathfrak{F})$, для которых $\mathfrak{D}\,\omega = 0$, где ω - гамильтонова форма, а $n = 2n'$.

3) Алгебра $\tilde{K}(\mathfrak{F})$ состоит из всех $\mathfrak{D} \in W(\mathfrak{F})$, для которых $\mathfrak{D}\,\omega = u\,\omega$, где ω - контактная форма, $u \in \hat{\mathcal{O}}(E)$, а $n = 2n' + 1$.

Согласно [30],[55] и [4], алгебры $S(\mathfrak{F},\omega) = \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$, $H(\mathfrak{F},\omega) = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$ и $K(\mathfrak{F}) = \tilde{K}(\mathfrak{F})^{(1)}$ (здесь и в далее $L^{(s)}$ обозначает s-й коммутант алгебры Ли L), при некоторых условиях на дифференциальные формы, являются простыми конечномерными алгебрами Ли и называются соответственно *специальными, гамильтоновыми и контактными алгебрами Ли картановского типа*.

§ 2. Специальная алгебра $S(\mathfrak{F},\omega)$

В этом и следующих двух параграфах мы напомним некоторые результаты, известные для соответствующих алгебр Ли.

В работах [32] и [56] показано, что любую дифференциальную форму объема ω, допустимыми автоморфизмами алгебры $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$, можно привести к одному из следующих видов

$$\begin{aligned} \omega_0 &= dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \\ \omega_1 &= (1 + e_{\mathfrak{F}})\omega_0, \\ \omega_2 &= \exp x_t\ \omega_0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $t \in \{1,\ldots,n\}$. В силу [21] алгебра $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F},\omega_0)$ - градуированная алгебра Ли, для которой имеет место

Предложение 2.1 (см. [21],[44]). *Как векторное пространство над* K *алгебра* $S(\mathfrak{F})$ *натянута на дифференцирования*

$$\mathfrak{D}_{ij}(a) = (\partial_i a)\partial_j - (\partial_j a)\partial_i\ , \quad a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}), \tag{0.2}$$

и имеет размерность

$$\dim_K S(\mathfrak{F}) = (n - 1)(p^m - 1).$$

В главе 1 нам понадобится следующая

Лемма 2.2 (см. [44]). *Если* $n > 2$ *и* i,j,k *различны, то*

$$[\ \mathfrak{D}_{ij}(f),\ \mathfrak{D}_{ik}(x_i x_k)\ ] = \mathfrak{D}_{ij}(h),$$

где $h = x_i\partial_i f - x_k\partial_k f - f$, *а* $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$.

§ 3. Гамильтонова алгебра $H(\mathfrak{F},\omega)$

Пусть $n = 2n'$. Для $1 \leqslant i \leqslant n'$ введем обозначения $\tilde{i} = n' + i$, $\widetilde{n'+i} = i$ и $\pi(i) = -\pi(\tilde{i}) = 1$. В работах [39] и [29] доказывается, что любую гамильтонову форму ω допустимыми автоморфизмами можно привести к виду

$$\omega = \exp v \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j,$$

где

$$\begin{cases} v = x_t^{(p^{m_t})}, \\ \omega_{ij} = \pi(i)\delta_{i\tilde{j}} + (\delta_{it} - \delta_{jt})^2 \beta_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + \\ \qquad + \frac{\bar{x}_t}{2}(\delta_{jt}\, \pi(i) x_{\tilde{i}} - \delta_{it} \pi(j) x_{\tilde{j}}), \end{cases} \tag{0.3}$$

$i,j,t \in \{1,\dots,n\}$, $(\beta_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{K})$, $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ и $\beta_{t\tilde{t}} = = \beta_{\tilde{t}t} = 0$ (δ_{ij} – дельта Кронекера); или

$$\begin{cases} v = 0, \\ \omega_{ij} = \pi(i)\delta_{i\tilde{j}} + \varepsilon_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j, \end{cases} \tag{0.4}$$

$(\varepsilon_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{K})$ и $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$. Из формул (0.3) и (0.4) получаем, что матрица $\Omega = (\omega_{ij})$ имеет вид

$$\Omega = \mathcal{A} + \mathcal{B}, \tag{0.5}$$

где $\mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -I & 0 \end{array}\right]$, I – единичная матрица порядка n', а матрица $\mathcal{B}$ имеет один из следующих видов:

1) Если $v = x_t^{(p^{m_t})}$, то

$$\mathcal{B} = (b_{ij}) = \bar{x}_t (R^T G - G^T R).$$

Здесь $G = [\delta_{1t}, \dots, \delta_{nt}]$, $R = [x_{\tilde{1}}/2 + \beta_{1t}\bar{x}_1, \dots, x_{\tilde{n}'}/2 + \beta_{n't}\bar{x}_{n'},$ $-x_1/2 + \beta_{\tilde{1}t}\bar{x}_{\tilde{1}}, \dots, -x_{n'}/2 + \beta_{\tilde{n}'t}\bar{x}_{\tilde{n}'}] \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$, причем в строке R на местах с номерами t и $\tilde{t}$ стоят нули. Заметим также, что B – кососимметрическая матрица и $b_{t\tilde{t}} = b_{\tilde{t}t} = 0$.

2) Если $v = 0$, то

$$B = \left[\begin{array}{c|c} 0 & S \\ \hline -S^T & 0 \end{array}\right],$$

где $S = (\alpha_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}}) \in \mathrm{Mat}_{n'}(\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$, $\alpha_{ij} = \varepsilon_{i\tilde{j}}$, $i,j \in \{1,\ldots,n'\}$.

Пусть $\omega_0 = \sum\limits_{i=1}^{n'} dx_i \wedge dx_{\tilde{i}}$ – стандартная гамильтонова дифференциальная форма (при $v = 0$ и $\Omega = \mathcal{A}$). В силу [21] $\mathrm{H}(\mathfrak{F}) = \mathrm{H}(\mathfrak{F},\omega_0)$ – градуированная алгебра Ли. Тогда имеют место следующие

Предложение 3.1 (см. [21]). *Как векторное пространство над K алгебра $\tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F})$ натянута на дифференцирования $\mathfrak{D}_u$, $u \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, и Q_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, где*

$$\mathfrak{D}_u = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}} u \partial_i - \partial_i u \partial_{\tilde{i}}), \qquad (0.6)$$

а $Q_j = \mathfrak{D}_{x_j^{(p^{m_j})}}$, *причем* $\dim_K \tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F}) = p^m + n - 1$.

Предложение 3.2 (см. [21]). *Гамильтонова алгебра $\mathrm{H}(\mathfrak{F})$ изоморфна алгебре $\mathcal{O}'(\mathfrak{F})/K$ с законом умножения*

$$(a,b) \longmapsto \{a,b\}_\omega = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}} a \partial_i b - \partial_i a \partial_{\tilde{i}} b), \qquad (0.7)$$

и $\dim_K \mathrm{H}(\mathfrak{F}) = p^m - 2$.

Приведем теперь несколько определений и результатов работы [29]. Гамильтонова дифференциальная форма ω называется *разложимой*, если допустимыми автоморфизмами ее можно привести к виду $\omega = \omega' + \omega''$, где ω' и ω'' – гамильтоновы формы от непересекающихся наборов переменных (иначе говоря, пространство E разбивается в прямую сумму $\mathrm{E} = \mathrm{E}' \oplus \mathrm{E}''$, при этом $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' \oplus \mathfrak{F}''$, тогда коэффициенты формы ω' лежат в $\mathcal{O}(\mathfrak{F}')$, а коэффициенты формы ω'' лежат в $\mathcal{O}(\mathfrak{F}''))$. В противном случае гамильтонова форма ω называется *неразложимой*.

Предложение 3.3 (см. [29]). *Пусть* $v = 0$, *тогда гамильтонову дифференциальную форму* ω, *допустимыми автоморфизмами алгебры* $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$, *можно привести к виду*

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_t,$$

где ω_i *- неразложимые формы* $\forall i$. *Это представление однозначно с точностью до перестановки слагаемых и их эквивалентности (относительно допустимых автоморфизмов).*

Предложение 3.4 (см. [29]). *Пусть* $v = 0$, *тогда неразложимая гамильтонова форма* ω *приводится к виду* (0.4) *с матрицей* Ω (0.5), *то есть*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n'} dx_i \wedge dx_{\tilde{i}} + \sum_{i,j=1}^{n'} a_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}}\, dx_i \wedge dx_{\tilde{j}},$$

причем матрица $a = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n'}(K)$ *имеет один из двух видов*

$$a = \mathcal{J}_{n'}(0) \tag{0.8}$$

или

$$a = \begin{bmatrix} 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \\ \mathcal{J}_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq 0, \quad n' = rl. \tag{0.9}$$

Здесь $\mathcal{J}_r(\lambda)$ - жорданова клетка размерности r с собственным значением λ, а I - единичная матрица размерности r.

§ 4. Контактная алгебра $K(\mathfrak{F})$

Пусть $n = 2n' + 1$ и $K(\mathfrak{F})$ - контактная алгебра Ли картановского типа. Имеет место

Предложение 4.1 (см. [21]). *Как векторное пространство над K алгебра $K(\mathfrak{F})$ натянута на элементы*

$$\mathfrak{D}_u = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}} u \partial_i - \partial_i u \partial_{\tilde{i}}) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i (\partial_n u \partial_i - \partial_i u \partial_n) + 2u\partial_n, \quad (0.10)$$

$u \in B(\mathfrak{F})$, где

$$B(\mathfrak{F}) = \begin{cases} O(\mathfrak{F}), & \text{если } n + 3 \not\equiv 0 \pmod p; \\ O'(\mathfrak{F}), & \text{если } n + 3 \equiv 0 \pmod p; \end{cases}$$

и имеет следующую размерность

$$\dim_K K(\mathfrak{F}) = \begin{cases} p^m, & \text{если } n + 3 \not\equiv 0 \pmod p; \\ p^m - 1, & \text{если } n + 3 \equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Умножение в алгебре $K(\mathfrak{F})$ задается формулой $[\mathfrak{D}_a, \mathfrak{D}_b] = \mathfrak{D}_c$, где

$$c = (\partial_n b)\Delta a - (\partial_n a)\Delta b + \{a,b\}_\omega, \quad (0.11)$$

$\Delta a = 2a - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \partial_i a$, а коммутатор $\{a,b\}_\omega$ есть обычная скобка Пуассона (0.7).

§ 5. Определение сэндвичевой подалгебры

Пусть L – конечномерная алгебра Ли над K. Говорят, что алгебра L обладает сильным вырождением, если в L отлично от нуля множество

$$C(L) = \{ C \in L \mid (\operatorname{ad} C)^2 = 0 \}.$$

Множество $C(L)$ замкнуто относительно операции коммутирования порождает нильпотентную подалгебру $\mathfrak{C}(L)$ в L, инвариантную тносительно группы автоморфизмов алгебры L. Подалгебру (L), используя терминологию [19], будем называть *сэндвичеой* *). Необходимо отметить, что над полем характеристики 0 аких алгебр нет. В обзоре [17] А.И.Кострикиным была выскаана следующая

Гипотеза. *Нормализатор* $N_L(\mathfrak{C}(L))$ *является максимальной одалгеброй в любой неклассической (обладающей сильным выюждением) простой алгебре Ли* L *над* K.

В главах 2 и 3 мы докажем справедливость данного утвер- ждения для всех известных к настоящему времени простых конеиномерных алгебр Ли, обладающих сильным вырождением (при) > 3).

В дальнейшем мы часто будем использовать результаты, юлученные в работе [21], относительно подалгебры $\mathfrak{C}$ в общей алгебре Ли с тривиальным флагом (т.е. когда $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 1$). В этом случае алгебру $W(\mathfrak{F})$ будем обозначать через W_n **). Пусть $\bigoplus_{i \geqslant -1} W_{n,[i]}$ – стандартная градуировка в W_n, тогда соответствующая ей фильтрация $\{W_{n,(j)}\}$ определяется следующим образом :

$$W_{n,(j)} = \sum_{i \geqslant j} W_{n,[i]}.$$

Предложение 5.1 (см. [21]). *В алгебре* W_n *имеет место включение*

$$W_{n,\left[\frac{p-1}{2}\right]} \supset \mathfrak{C}(W_n) \supseteq W_{n,\left[\frac{p+1}{2}\right]}.$$

---

*) Из условия $(\mathrm{ad}\, C)^2 = 0$ следует, что $(\mathrm{ad}\, C)(\mathrm{ad}\, \mathfrak{D})(\mathrm{ad}\, C) = 0$ для всех $\mathfrak{D} \in L$, поэтому C обычно называют *тонким сэндвичем* (или *сэндвичем толщины* 1).

**) Согласно [21], алгебра W_n является ограниченной алгеброй (p-алгеброй) Ли (определение p-алгебры см. в [2]).

Для элемента $C \in W_{n,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$ *следующие утверждения эквивалентны*

a) $C = \sum_{i=1}^{n} c_i\partial_i \in \mathfrak{C}(W_n)$;

b) $\operatorname{div} C = \sum_{i=1}^{n} \partial_i c_i = 0$.

Предложение 5.2 (см. [21]). *Пусть* $C = \sum_{i=1}^{n} c_i\partial_i \in W(\mathfrak{F})$, *тогда условия*

$$c_i c_j = 0,\ c_k\partial_i c_j = 0,\ c_k\partial_i \operatorname{div} C = 0,\quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant n, \qquad (0.12)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $C \in C(W(\mathfrak{F}))$.

Заметим во-первых, что в работе [21] это утверждение доказано для тривиального флага $\mathfrak{F}$, однако общий случай рассматривается аналогично, а во-вторых третье соотношение мы заменили на более удобное. В самом деле, третье соотношение леммы 1 гл.1 §4 работы [21] имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} (\partial_j c_k)(\partial_i c_j) = 0.$$

Для фиксированного j имеем

$$(\partial_j c_k)(\partial_i c_j) = \partial_j(c_k\partial_i c_j) - c_k\partial_j\partial_i c_j.$$

Воспользовавшись вторым соотношением ($c_k\partial_i c_j = 0$), а также перестановочностью дифференцирований ($\partial_j\partial_i = \partial_i\partial_j$), получим

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j c_k)(\partial_i c_j) = -c_k\partial_i \sum_{j=1}^{n} \partial_j c_j = -c_k\partial_i \operatorname{div} C.$$

§ 6. Строение алгебры Меликяна

Пусть K - поле характеристики $p = 5$, $n = 2$ (т.е. $E = \langle x_1, x_2\rangle$) и $\mathfrak{Z} = L(m_1, m_2)$ - алгебра Меликяна [26], [27],

[45] над $\mathcal{K}$. Алгебра $\mathfrak{Z}$ является простой конечномерной алгеброй Ли над $\mathcal{K}$, обладающей сильным вырождением. В работе [46] М.И.Кузнецов показал, что алгебра $\mathfrak{Z}$ является алгеброй Ли типа G_2 и имеет градуировку по mod 3 :

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{Z}_{\bar 1} \oplus \mathfrak{Z}_{\bar 2},$$

где $\mathfrak{Z}_{\bar 0} = W(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{Z}_{\bar 1} = \mathcal{O}(\mathfrak{F})\omega^{-1/3}$, $\mathfrak{Z}_{\bar 2} = W(\mathfrak{F})\omega^{1/3} = \tilde{W}(\mathfrak{F})$, $\omega = dx_1 \wedge dx_2$, а $\bar s \in \mathbb{F}_3 = \{\bar 0, \bar 1, \bar 2\}$ (простое поле характеристики 3) Умножение в алгебре $\mathfrak{Z}$ задается следующими формулами :

$$[\,\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\,] = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1, \tag{0.13}$$

$\forall\ \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathfrak{Z}_{\bar 0}$ (обычное умножение в алгебре $W(\mathfrak{F})$);

$$[\,\mathfrak{D}, f\omega^{-1/3}\,] = (\mathfrak{D}(f) - 2f \operatorname{div} \mathfrak{D})\omega^{-1/3}, \tag{0.14}$$

$\forall\ \mathfrak{D} \in \mathfrak{Z}_{\bar 0}$ и $\forall\ f\,\omega^{-1/3} \in \mathfrak{Z}_{\bar 1}$ (обычное дифференцирование $\mathfrak{D}(f\omega^{-1/3})$);

$$[\,\mathfrak{D}, \tilde{B}\,] = \widetilde{[\,\mathfrak{D}, B\,]} + 2(\operatorname{div} \mathfrak{D})\tilde{B} =$$

$$= ([\,\mathfrak{D}, B\,] + 2(\operatorname{div} \mathfrak{D})B)\omega^{1/3}, \tag{0.15}$$

$\forall\ \mathfrak{D} \in \mathfrak{Z}_{\bar 0}$, $\forall\ \tilde{B} = B\,\omega^{1/3} \in \mathfrak{Z}_{\bar 2}$, $B = b_1\partial_1 + b_2\partial_2 \in W(\mathfrak{F})$ (далее будем обозначать $\partial_i\omega^{1/3}$ через $\tilde\partial_i$, тогда $\tilde{B} = b_1\tilde\partial_1 + b_2\tilde\partial_2 \in \tilde{W}(\mathfrak{F})$);

$$[\,f\omega^{-1/3}, g\omega^{-1/3}\,] = \begin{vmatrix} 0 & 2\tilde\partial_1 & 2\tilde\partial_2 \\ f & \partial_1 f & \partial_2 f \\ g & \partial_1 g & \partial_2 g \end{vmatrix} =$$

$$= 2(g\partial_2 f - f\partial_2 g)\tilde\partial_1 + 2(f\partial_1 g - g\partial_1 f)\tilde\partial_2, \tag{0.16}$$

$\forall\ f\omega^{-1/3}, g\omega^{-1/3} \in \mathfrak{Z}_{\bar 1}$;

$$[\, f\omega^{-1/3},\ \tilde{B}\,] = fB, \tag{0.17}$$

$\forall\ f \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, $\forall\ B \in W(\mathfrak{F})$; наконец, $\forall\ \tilde{A} = a_1\tilde{\partial}_1 + a_2\tilde{\partial}_2$ и $\tilde{B} = b_1\tilde{\partial}_1 + b_2\tilde{\partial}_2$ имеем

$$[\, \tilde{A},\ \tilde{B}\,] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\ \omega^{-1/3}. \tag{0.18}$$

§ 7. Вспомогательные утверждения

В данном параграфе мы приведем ряд утверждений, которые довольно часто будут использоваться в следующих главах.

Известно, что алгебра $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$ изоморфна алгебре срезанных многочленов $\mathcal{O}_m = K[y_1,\dots,y_m]/(y_1^p,\dots,y_m^p)$, поэтому $W(\mathfrak{F}) \subseteq W_m$, где $W_m = \mathrm{Der}\ \mathcal{O}_m$ (см. §5). Установим изоморфизм $\varphi\colon \mathcal{O}(\mathfrak{F}) \longrightarrow \mathcal{O}_m$ следующим образом :

$$\varphi\left[x_i^{(p^{j-1})}\right] = y_{ij}, \tag{0.19}$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$. Тогда

$$\partial_i = \sum_{j=1}^{m_i} (-1)^{j+1} y_{i1}^{p-1} \dots y_{i,j-1}^{p-1} \partial_{ij} \tag{0.20}$$

(при $j = 1$ имеем ∂_{i1}), здесь $\partial_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial y_{ij}}$. В дальнейшем мы часто будем использовать переход от структуры разделенных степеней (переменные - x_i) к "стертой" структуре срезанных многочленов (переменные - y_{ij}) в алгебре $W(\mathfrak{F})$ и обратно.

Минимальную степень однородных слагаемых в многочлене f из $\mathcal{O}_m$ будем называть порядком многочлена f и обозначать через $v_y(f)$. Обозначим также через $\mathfrak{M}$ - максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_m$.

Лемма 7.1 (см. [21]). *Если $f(y_1,\dots,y_m)$ - форма степени $\frac{p+1}{2}$ и $f^2 = 0$ в кольце O_m, то $f = l^{\frac{p+1}{2}}$, где l - линейная форма.*

Лемма 7.2. *Если $f(y_1,\dots,y_m)$ - форма степени k и $f^2 = 0$ в O_m, то $k \geqslant \frac{p+1}{2}$.*

Лемма 7.3. *Если $f(y_1,\dots,y_m) \in O_m$ и $k \leqslant v_y(f)$ (причем $k < p$), тогда f можно представить в виде*

$$f = \sum_{j\in J} l_j^k g_j,$$

где l_j - линейные формы, а g_j - многочлены из O_m.

Лемма 7.4. *Пусть $f(y_1,y_2) = y_1^{\alpha}\, y_2^{\beta}$ - форма степени $k = (\alpha + \beta) < p$ в O_m, тогда f можно представить в виде*

$$f = \sum_{j\in J} l_j^k,$$

где l_j - линейные формы, содержащие y_1 $\forall j \in J$.

Лемма 7.5 (см. [35]). *Предположим, что высоты переменных в флаге $\mathfrak{F}'$ на единицу меньше, чем соответствующие высоты в флаге $\mathfrak{F}$. Тогда, если $l_1,\dots,l_k$ - линейные формы в O_m, (подалгебра в O_m, изоморфная подалгебре $O(\mathfrak{F}')$ в $O(\mathfrak{F})$), $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i < p$, то элемент $l_1^{(\alpha_1 p)} \dots l_k^{(\alpha_k p)}$ пространства $O(\mathfrak{F})$ может быть представлен в виде*

$$l_1^{(\alpha_1 p)} \dots l_k^{(\alpha_k p)} = \sum_j g_j^{(\alpha p)} + z,$$

где g_j - линейные формы в O_m, а $z \in \mathfrak{M}^p$.

Глава 1. СТРОЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ И ГАМИЛЬТОНОВЫХ АЛГЕБР ЛИ КАРТАНОВСКОГО ТИПА

В этой главе мы рассмотрим серии специальных и гамильтоновых алгебр Ли, для которых будут доказаны утверждения, аналогичные предложениям 2.1, 3.1 и 3.2 главы 0, но для произвольной соответствующей дифференциальной формы.

§ 1. Система образующих в алгебре $S(\mathfrak{F},\omega)$

Пусть $\mathfrak{D} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \partial_i \in W(\mathfrak{F})$ и $\omega = \varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ - дифференциальная форма объема. По условию $\mathfrak{D}\,\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \partial_i(\varphi f_i) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0$, откуда

$$\operatorname{div}\,(\varphi\,\mathfrak{D}) = 0 \tag{1.1}$$

- необходимое и достаточное условие принадлежности элемента $\mathfrak{D}$ к алгебре $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$. Далее в этом и следующем параграфе полагаем, что форма ω имеет один из видов (0.1). Пусть

$$G = \langle \bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) \mid a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}),\ 1 \leqslant i,j \leqslant n \rangle$$

- векторное пространство над K, где

$$\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) = \mathfrak{D}_{ij}(a) + a\,\varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(\varphi), \tag{1.2}$$

а $\mathfrak{D}_{ij}(a)$ определяется формулой (0.2).

Лемма 1.1. *В алгебре* $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$ *имеет место включение* $S(\mathfrak{F},\omega) \subseteq G$.

Доказательство. Очевидно, что элементы

$$\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) = \varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(a\,\varphi) = \mathfrak{D}_{ij}(a) + a\,\varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(\varphi),$$

где $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, лежат в алгебре $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$, т.е. $G \subseteq \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$. Покажем, что $S(\mathfrak{F},\omega) \subseteq G$.

Также как и в доказательстве леммы 4 работы [44] рассмотрим дифференцирования $\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i$ и $\mathcal{B} = \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i$ из $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$, тогда $C = [\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \,] = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \in S(\mathfrak{F},\omega)$. Вычислим

$$\varphi^{-1} \sum_{j=1}^{n} \partial_j \{\varphi(a_j b_i - b_j a_i)\} = \sum_{j=1}^{n} \{a_j \partial_j b_i - b_j \partial_j a_i\} +$$

$$+ \varphi^{-1} b_i \{\varphi \operatorname{div} \mathcal{A} + \mathcal{A}(\varphi)\} - \varphi^{-1} a_i \{\varphi \operatorname{div} \mathcal{B} + \mathcal{B}(\varphi)\} =$$

$$= c_i + \varphi^{-1} b_i \operatorname{div}(\varphi\mathcal{A}) - \varphi^{-1} a_i \operatorname{div}(\varphi\mathcal{B}).$$

Поскольку $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$, то в силу (1.1) $\operatorname{div}(\varphi\mathcal{A}) = \operatorname{div}(\varphi\mathcal{B}) = 0$, откуда

$$c_i = \varphi^{-1} \sum_{j \neq i} \partial_j \{\varphi(a_j b_i - b_j a_i)\}.$$

Но тогда

$$C = \sum_{i<j} \varphi^{-1} \mathfrak{D}_{ij}(\varphi(a_j b_i - b_j a_i)) = \sum_{i<j} \bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a_j b_i - b_j a_i),$$

причем $a_i, b_i \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$ для всех $i \in \{1,\dots,n\}$.

Итак, мы показали, что $S(\mathfrak{F},\omega) \subseteq G \subseteq \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$.

Теорема 1.2. *Как векторное пространство над* K *алгебра* $S(\mathfrak{F},\omega)$ *натянута на дифференцирования* $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$, *где* $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что нам достаточно показать включение $G \subseteq S(\mathfrak{F},\omega)$. В случае $\omega = \omega_0$ это следует из предложения 2.1 главы 0, поэтому нам остается рассмотреть всего два случая.

1. $\omega = \omega_1$. Пусть $\mathfrak{L} = \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega)$. По условию $\varphi = 1 + e_{\mathfrak{F}}$,

поэтому, если $\mathfrak{D} \in \mathfrak{L}_0$ ($\mathfrak{L}_0$ - нулевой член стандартной фильтрации в $\mathfrak{L}$), то $\varphi\,\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$, откуда $\operatorname{div}(\varphi\,\mathfrak{D}) = \operatorname{div}\mathfrak{D} = 0$. Другими словами, все дифференцирования $\mathfrak{D} \in \mathfrak{L}_0$ имеют тот же вид, что и соответствующие дифференцирования из $\tilde{S}(\mathfrak{F}) = \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_0)$ (см. [21]). Покажем, что $G \subseteq G^{(1)} = [\,G,\ G\,]$.

В силу сказанного выше $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) = \mathfrak{D}_{ij}(a)$, если $a \in \sum\limits_{l\geqslant 2}\mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[l]}$. Если же $a_0 \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[0]} = \mathcal{K}$, то $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a_0) = \mathfrak{D}_{ij}(a_0) + a_0\varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(\varphi) = a_0\mathfrak{D}_{ij}(e_{\mathfrak{F}}) = \bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a_0e_{\mathfrak{F}})$, т.е. этот случай относится к предыдущему, когда $a = a_0e_{\mathfrak{F}} \in \sum\limits_{l\geqslant 2}\mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[l]}$. Наконец, если $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[1]}$, то $a = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, тогда $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(x_i) = (1 - e_{\mathfrak{F}})\partial_j = \varphi^{-1}\partial_j$.

Таким образом, нам необходимо показать, что $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(x_i) \in G^{(1)}$ и $\mathfrak{D}_{ij}(a) \in G^{(1)}$, $\forall i,j$ и $a \in \sum\limits_{l\geqslant 2}\mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[l]}$. Легко проверить (см. [6]), что

$$[\,\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(x_i),\ \bar{\mathfrak{D}}_{ij}(x_j^{(2)})\,] = \bar{\mathfrak{D}}_{ij}(x_j),$$

откуда $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(x_j) \in G^{(1)}$. Пусть $f \in \sum\limits_{l\geqslant 3}\mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[l]}$, тогда

$$[\,\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(f),\ \bar{\mathfrak{D}}_{sk}(x_s)\,] = [\,\mathfrak{D}_{ij}(f),\ \varphi^{-1}\partial_k\,] = -\mathfrak{D}_{ij}(\partial_k f) =$$
$$= -\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(\partial_k f).$$

В силу произвольности k, получаем, что $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) \in G^{(1)}$ для любого монома $a = x_1^{(i_1)}\ldots x_n^{(i_n)} \in \sum\limits_{l\geqslant 2}\mathcal{O}(\mathfrak{F})_{[l]}$, кроме монома $a = e_{\mathfrak{F}}$.

Воспользуемся леммой 2.2 главы 0, положив $f = e_{\mathfrak{F}}$, тогда $h = x_i\partial_i e_{\mathfrak{F}} - x_k\partial_k e_{\mathfrak{F}} - e_{\mathfrak{F}} = -e_{\mathfrak{F}} + e_{\mathfrak{F}} - e_{\mathfrak{F}} = -e_{\mathfrak{F}}$, откуда $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(e_{\mathfrak{F}}) \in G^{(1)}$.

Итак, мы показали, что $G \subseteq G^{(1)} \subseteq S(\mathfrak{F},\omega)$.

2. $\omega = \omega_2$. Также как и в предыдущем случае, покажем

включение $G \subseteq G^{(1)}$. По условию $\varphi = \exp x_t$, следовательно

$$\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) = \begin{cases} \mathfrak{D}_{ij}(a) & , \text{при } i,j \neq t; \\ \mathfrak{D}_{tj}(a) + a\partial_j & , \text{при } i = t; \end{cases} \tag{1.3}$$

$\forall\ a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Отметим, что элементы $\mathfrak{D}_{ij}(a)$ (при $i,j \neq t$) образуют градуированную алгебру $S(\mathfrak{F}')$ над $K[x_t]$. А для $S(\mathfrak{F}')$ включение справедливо, поскольку $S(\mathfrak{F}') = [\, S(\mathfrak{F}'), S(\mathfrak{F}')\,]$.

Таким образом, нам остается показать, что $\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(a) \in G^{(1)}$ $\forall\ a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Пусть $a = x_1^{(i_1)} \dots x_n^{(i_n)}$, где $0 \leqslant i_s < p^{m_s}$. Для $i,k \neq t$ имеем

$$[\, \bar{\mathfrak{D}}_{tj}(a),\ \bar{\mathfrak{D}}_{ik}(x_i)\,] = -\,\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(\partial_k a).$$

Поскольку k – любой номер отличный от t, то тем самым мы доказали, что $\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(a) \in G^{(1)}$ для всех мономов a, кроме мономов вида

$$a = \bar{x}_1 \dots x_t^{(i_t)} \dots \bar{x}_n. \tag{1.4}$$

Для различных $k,j \neq t$ получаем (см. [6])

$$[\, \bar{\mathfrak{D}}_{tj}(a),\ \bar{\mathfrak{D}}_{tk}(x_k)\,] = \bar{\mathfrak{D}}_{tj}(h),$$

где $h = \partial_t a - x_k \partial_k a$.

Обозначим через $\tilde{e}$ моном вида (1.4) при $i_t = 0$, то есть $\tilde{e} = \prod\limits_{i \neq t} \bar{x}_i$. Положив $a = \tilde{e}$, получаем $h = \tilde{e}$, откуда $\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(\tilde{e}) \in G^{(1)}$. Пусть теперь $a = x_t \tilde{e}$, тогда $h = \tilde{e} + x_t\tilde{e} = \tilde{e} + a$, но $\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(h) \in G^{(1)}$ и $\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(\tilde{e}) \in G^{(1)}$, следовательно $\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(a) = \bar{\mathfrak{D}}_{tj}(h) - \bar{\mathfrak{D}}_{tj}(\tilde{e}) \in G^{(1)}$. Далее индукцией по i_t легко показать, что для любого монома a вида (1.4) $\bar{\mathfrak{D}}_{tj}(a) \in G^{(1)}$. Теорема доказана.

§ 2. Размерность алгебры $S(\mathfrak{F},\omega)$

Теорема 2.1. *Алгебра* $S(\mathfrak{F},\omega)$ *имеет следующую размерность*

$$\dim_{K} S(\mathfrak{F},\omega) = \begin{cases} (n-1)(p^{m}-1), & \textit{если} \quad \varphi \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}); \\ (n-1)\, p^{m}, & \textit{если} \quad \varphi \notin \mathcal{O}(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Доказательство. В случае $\omega = \omega_0$ это утверждение следует из предложения 2.1 главы 0. Пусть $\omega = \omega_1$, $\bigoplus\limits_{i \geqslant -1} S_{[i]}$ – стандартная градуировка в алгебре $S(\mathfrak{F})$ *) и $\mathfrak{L}_{-1} \supset \mathfrak{L}_0 \supset \ldots$ – стандартная фильтрация в алгебре $S(\mathfrak{F},\omega_1)$. Из доказательства теоремы 1.2 следует, что $\mathfrak{L}_0 = \bigoplus\limits_{i \geqslant 0} S_{[i]}$, т.е. $S(\mathfrak{F}) = S_{[-1]} \oplus \mathfrak{L}_0$. Рассмотрим векторное пространство

$$V = \langle\, \bar{\mathfrak{D}}_{ij}(x_i) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n \,\rangle .$$

Легко видеть, что $\{\partial_i - e_{\mathfrak{F}} \partial_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – базис пространства V, поэтому $\dim V = \dim S_{[-1]} = n$. А так как $S(\mathfrak{F},\omega_1) = V \oplus \mathfrak{L}_0$ (см. доказательство теоремы 1.2), то $\dim S(\mathfrak{F},\omega_1) = \dim S(\mathfrak{F}) = (n-1)(p^{m}-1)$.

Пусть теперь $\omega = \omega_2$, т.е. $\varphi = \exp x_t \notin \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Из условия (1.1) получаем

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} + f_t = 0 \qquad (1.5)$$

– необходимое и достаточное условие принадлежности элемента $\mathfrak{D}$ к $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$.

Для дальнейшего доказательства теоремы нам понадобятся следующие утверждения

---

*) Градуировка, в которой $S_{[i]} = S(\mathfrak{F}) \cap W(\mathfrak{F})_{[i]}$.

Лемма 2.2. $\dim \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2) = (n-1)p^m$.

Доказательство. Доказывать это утверждение будем индукцией по n. Если $n = 1$*), тогда условие (1.5) примет вид $\partial_1 f_1 + f_1 = 0$, откуда $f_1 = 0$ (поскольку $f_1 \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$), т.е. $d_1 = \dim_K \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2) = 0$.

Предположим, что $d_{n-1} = (n-2)p^{\bar{m}}$, где $\bar{m} = m_1 + \ldots + m_{n-1}$ Из (1.5) имеем

$$-\partial_n f_n = \partial_1 f_1 + \ldots + \partial_{n-1} f_{n-1} + f_t. \qquad (1.6)$$

Без потери общности будем полагать, что $t \neq n$. Положим $x = x_n$, тогда

$$f_i = \sum_{l=0}^{p^{m_{n-1}}} a_{il} x^{(l)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad (1.7)$$

где $a_{ij} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}^{(n)})$. Здесь и в дальнейшем $\mathfrak{F}^{(j)}$ означает, что пространство E флага $\mathfrak{F}^{(j)}$ не содержит переменной x_j. Из (1.7) получаем, что

$$\partial_i f_i = \sum_{l=0}^{p^{m_{n-1}}} (\partial_i a_{il}) x^{(l)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

$$\partial_n f_n = a_{n1} + a_{n2} x + \ldots + a_{n,p^{m_n}-1} x^{(p^{m_n}-2)}.$$

Таким образом, уравнение (1.6) эквивалентно уравнениям

$$-a_{nk} = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i a_{i,k-1} + a_{t,k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant p^{m_n} - 1, \qquad (1.8)$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i a_{i,p^{m_n}-1} + a_{t,p^{m_n}-1}. \qquad (1.9)$$

---

*) Алгебру $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$ формально мы можем определить для всех n.

Отсюда видно, что $(n-1)(p^{m_n}-1)$ векторов a_{ik} есть произвольные элементы из $O(\mathfrak{F}^{(n)})$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и $0 \leqslant k \leqslant \leqslant p^{m_n}-2$. Элемент a_{n0} также произвольный из $O(\mathfrak{F}^{(n)})$. Вектора a_{nk} определяются уравнениями (1.8), а вектор $(a_{1,p^{m_n}-1},\ldots,a_{n-1,p^{m_n}-1})$ в силу (1.9) и (1.5) есть произвольный вектор пространства $\tilde{S}(\mathfrak{F}^{(n)},\omega_2)$. Тогда

$$d_n = d_{n-1} + (n-1)(p^{m_n}-1)p^{\bar{m}} + p^{\bar{m}} = (n-1)p^{m}.$$

Лемма 2.3. *Дифференцирования вида*

$$x_t^{(\alpha)}\prod_{j\neq t,\,i}\bar{x}_j\partial_i \qquad (i\neq t \text{ и } 0\leqslant\alpha\leqslant p^{m_t}-1)$$

лежат в $S(\mathfrak{F},\omega_2)$.

Доказательство. Согласно §1, алгебра $S(\mathfrak{F},\omega_2)$ натянута на дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$ вида (1.3). Пусть $a = \prod_{j\neq \underline{t},\,i}\bar{x}_j$, тогда $\bar{\mathfrak{D}}_{ti}(a) = a\partial_i \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$. Положим $\tilde{a} = x_t a$, тогда $\bar{\mathfrak{D}}_{ti}(\tilde{a}) = \tilde{a}\partial_i + a\partial_i$, откуда получаем, что $x_t a\partial_i = \bar{\mathfrak{D}}_{ti}(\tilde{a}-a) \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$ Далее индукцией по α легко получается наше утверждение.

Лемма 2.4. $S(\mathfrak{F},\omega_2) = \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$.

Доказательство. Покажем, что любое дифференцирование $\mathfrak{D} = \sum f_i\partial_i \in \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$ представимо в виде линейной комбинации элементов $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$ вида (1.3). Для доказательства введем понятие *длины дифференцирования* $\mathfrak{D} = (f_1,\ldots,f_n)$ как число $\lambda(\mathfrak{D})$ ненулевых координат f_i в $\mathfrak{D}$. Доказывать наше утверждение будем индукцией по $\lambda(\mathfrak{D})$.

Пусть $\lambda(\mathfrak{D}) = 1$, тогда $\mathfrak{D} = f_i\partial_i$. По условию $\mathfrak{D} \in \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$, поэтому $\mathfrak{D}$ удовлетворяет соотношениям (1.5), т.е. $\partial_i f_i = 0$ (если $i \neq t$) или $\partial_t f_t + f_t = 0$ (если $i = t$). В первом случае (если $i \neq t$) $f_i \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}^{(i)})$. Легко проверить, что

$$\mathfrak{D} = f_i\partial_i = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\ \bar{\mathfrak{D}}_{ti}(\partial_t^k f_i),$$

где ∂_t^k - k-я производная по переменной x_t. Отсюда $\mathfrak{D} \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$. Во втором случае (при $i = t$) $f_t = 0$, поскольку $f_t \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Таким образом, $S(\mathfrak{F},\omega_2)$ содержит все дифференцирования из $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$ длины 1.

Предположим теперь, что $S(\mathfrak{F},\omega_2)$ содержит все дифференцирования $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$ длины $< k$ и пусть $\lambda(\mathfrak{D}) = k$. Не уменьшая общности, мы можем полагать, что $\mathfrak{D} = (f_1,\ldots,f_k,0,\ldots,0)$.

Рассмотрим два случая

a) $t > k$, тогда $f_t = 0$ и, следовательно, $\operatorname{div}\mathfrak{D} = 0$. Иначе говоря, $\mathfrak{D} \in \tilde{S}(\mathfrak{F}^{(t)},\omega_0)$ над $K[x_t]$. Но в силу [21] $\tilde{S}(\mathfrak{F}^{(t)}) = S(\mathfrak{F}^{(t)}) \bigoplus_{K[x_t]} V$, где

$$V = \langle \prod_{j\neq t,i}\bar{x}_j\partial_i \mid 1 \leqslant i(\neq t) \leqslant n \rangle_{K[x_t]}.$$

Поскольку $S(\mathfrak{F}^{(t)})$ над $K[x_t]$ лежит в $S(\mathfrak{F},\omega_2)$ (как коммутант) и, по лемме 2.3, V над $K[x_t]$ тоже лежит в $S(\mathfrak{F},\omega_2)$, то $\tilde{S}(\mathfrak{F}^{(t)})$ над $K[x_t]$ также лежит в $S(\mathfrak{F},\omega_2)$, откуда и $\mathfrak{D} \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$.

b) $t \leqslant k$. Поскольку $k \geqslant 2$, то можно полагать, что $t \neq k$, т.е. $t < k$. Пусть $x = x_k$ и

$$f_i = \sum_{l=0}^{p^{m_k}-1} a_{il}x^{(l)}, \qquad a_{il} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}^{(k)}).$$

Применим свойство (1.5) и как в лемме 2.2 получим

$$a_{ks} = -\sum_{i=1}^{k-1}\partial_i a_{i,s-1} - a_{t,s-1}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant p^{m_k}-1.$$

Но $\bar{\mathfrak{D}}_{ki}(a_{i,s-1}x^{(s)})$ - вектор, который своей k-й координатой имеет

$$g_{k\iota} = -(\partial_t a_{\iota,s-1})x^{(s)},$$

для всех $\iota \in \{1,\ldots,k-1\}$ и $\iota \neq t$, а все остальные координаты $g_{j\iota} = 0$ $\forall j > k$. Для $\iota = t$ вектор $\bar{\mathfrak{D}}_{kt}(a_{t,s-1}x^{(s)})$ имеет k-ю координату

$$g_{kt} = -(\partial_t a_{t,s-1} + a_{t,s-1})x^{(s)}.$$

Тогда, если

$$\mathcal{A} = \mathfrak{D} - \sum_{\iota=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{p^{m_k}-1} \bar{\mathfrak{D}}_{k\iota}(a_{\iota,s-1}x^{(s)}),$$

то $\mathcal{A} = (h_1,\ldots,h_k,0,\ldots,0)$; $\mathcal{A} \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D} \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$; $h_k = a_{k0} \in O(\mathfrak{F}^{(k)})$. Заметим, что дифференцирование

$$\mathcal{B} = \sum_{l\geqslant 0}(-1)^l\,\bar{\mathfrak{D}}_{tk}(\partial_t^l h_k) = h_k\partial_k$$

имеет ненулевой только k-ю координату. Но тогда $C = (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \in \tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$, причем $\lambda(C) < k$, т.е. по предположению индукции $C \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$. А так как $\mathcal{B} \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$, то $\mathcal{A} \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$, следовательно и $\mathfrak{D} \in S(\mathfrak{F},\omega_2)$.

Итак, мы показали, что $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2) \subseteq S(\mathfrak{F},\omega_2)$. Лемма доказана.

Доказательство же утверждения теоремы о том, что $\dim S(\mathfrak{F},\omega_2) = (n-1)p^m$ следует из лемм 2.2 и 2.4. Теорема доказана.

Следствие 2.5. *Алгебра* $\tilde{S}(\mathfrak{F},\omega_2)$ *- простая алгебра Ли.*

§ 3. Система образующих в алгебре $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$

Пусть $n = 2n'$, $\mathfrak{D} = \sum f_i\partial_i \in W(\mathfrak{F})$, $F = (f_1,\ldots,f_n)$ -

строка из $\mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$, $\mathrm{rot}\, F = (\partial_j f_i - \partial_i f_j)$ - матрица из $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$ и

$$\omega = \exp v \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$$

- гамильтонова дифференциальная форма, где $v = 0$ или $v = x_t^{(p^{m_t})}$, а $\Omega = (\omega_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$ имеет вид (0.5). По условию $\mathfrak{D}\,\omega = 0$, откуда

$$\mathrm{rot}\,\{(\exp v)\, F\, \Omega\} = 0 \qquad (1.10)$$

- необходимое и достаточное условие принадлежности элемента $\mathfrak{D}$ к $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$. Отсюда получаем систему уравнений

$$\partial_s \tilde{f}_l = \partial_l \tilde{f}_s, \qquad 1 \leqslant s, l \leqslant n, \qquad (1.11)$$

где

$$\tilde{f}_l = \exp v \sum_{i=1}^{n} \omega_{il} f_i .$$

3.1. Пусть $v = x_t^{(p^{m_t})}$. Тогда решение системы (1.11) $\tilde{f}_l \in \hat{\mathcal{O}}(E)$ и имеет вид $\tilde{f}_l = \partial_l u$, где u - произвольный элемент из $\hat{\mathcal{O}}(E)$, удовлетворяющий условиям

$$\exp(-v)\, \partial_l u \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}), \qquad 1 \leqslant l \leqslant n. \qquad (1.12)$$

Таким образом, всякое дифференцирование $\mathfrak{D} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ представляется в виде

$$\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{D}}_u = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i ,$$

где

$$f_i = \exp(-v) \sum_{j=1}^{n} \bar{\omega}_{ji} \partial_j u.$$

Здесь и в дальнейшем $\bar{\Omega} = (\bar{\omega}_{ij}) = \Omega^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$.

Легко убедиться, что $\exp v = h \exp x_t$, где $h =$

$$= \sum_{k=0}^{p^{m_t}-1} (-x_t)^{(k)}, \text{ и } \exp x_t = h^{-1} \exp v, \text{ где } h^{-1} = \sum_{k=0}^{p^{m_t}-1} x_t^{(k)},$$

поэтому условия (1.12) на u можно записать в другом виде

$$\exp(-x_t)\, \partial_l u = g_l \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}), \qquad 1 \leqslant l \leqslant n. \tag{1.13}$$

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения (1.13) при $l = t$ ($\partial_t u = g_t \exp x_t$) имеет вид $u = c + u_1$, где $c = c(x_1, \ldots, \hat{x}_t, \ldots, x_n)$ (т.е. c не зависит от x_t), а u_1 – частное решение. Будем искать частное решение в виде $u_1 = a \exp x_t$, где $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Тогда

$$\partial_t u = (\partial_t a + a) \exp x_t = g_t \exp x_t,$$

откуда

$$\partial_t a + a = g_t,$$

т.е. мы получили линейное уравнение с правой частью, причем правая часть есть многочлен из $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$, поэтому, методом неопределенных коэффициентов, можно найти многочлен $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, являющийся частным решением данного уравнения, а, следовательно, исходное уравнение имеет решение $u = c + a \exp x_t$.

С другой стороны, ряд u должен удовлетворять условиям (1.13) для любого $l \neq t$, т.е. $\exp(-x_t)\, \partial_l u = \exp(-x_t)\, \partial_l c + \partial_l a = g_l \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Но это возможно лишь при $\partial_l c = 0$ $\forall l$, т.е. $c \in K$. Положив $\tilde{a} = a\, h^{-1}$, получим $u = c + \tilde{a} \exp v$. А поскольку $\partial_l u = \partial_l (c + \tilde{a} \exp v) = \partial_l (\tilde{a} \exp v)$, поэтому можно считать, что $u = \tilde{a} \exp v$, где $\tilde{a} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$.

Итак, мы получили, что любое дифференцирование $\mathfrak{D} \in \tilde{H}(\mathfrak{F}, \omega)$ фактически имеет вид

$$\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{D}}_{\tilde{a}} = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i, \tag{1.14}$$

где

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{\omega}_{ji} (\partial_j \tilde{a} + \tilde{a}\, \partial_j v), \qquad \tilde{a} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}).$$

3.2. Пусть $v = 0$. Тогда $\tilde{f}_l = \sum_{i=1}^{n} \omega_{il} f_i \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$ и решение системы (1.11) будет иметь вид $\tilde{f}_l = \partial_l u + \gamma_l \bar{x}_l$, где u - произвольный элемент из $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$, а $\gamma_l \in \mathcal{K}$. Поэтому любое дифференцирование $\mathfrak{D} \in \tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F},\omega)$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{D}}_u + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j Q_j,$$

где $u \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, $\gamma_j \in \mathcal{K}$, $\bar{\mathfrak{D}}_u$ имеет вид (1.14), а $Q_j = \bar{\mathfrak{D}}_{x_j^{(p^{m_j})}}$.

Приведенные в данном параграфе рассуждения показывают, что справедливо

Предложение 3.1. *Как векторное пространство над* $\mathcal{K}$ *алгебра* $\tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F},\omega)$ *натянута на дифференцирования* $\bar{\mathfrak{D}}_u$, $u \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, *вида* (1.14) *и (если* $v = 0$*)* Q_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, *причем*

$$\dim_{\mathcal{K}} \tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F},\omega) = \begin{cases} p^m & , \text{ если } v \neq 0; \\ p^m + n - 1, & \text{ если } v = 0. \end{cases}$$

§ 4. Умножение в алгебре $\tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F},\omega)$

Пусть $\mathfrak{D}_{h_1}, \mathfrak{D}_{h_2} \in \tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F},\omega)$. Известно (см. например [1]), что $[\mathfrak{D}_{h_1}, \mathfrak{D}_{h_2}] = \mathfrak{D}_{h_3}$, где $h_3 = \exp(-v) \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\omega}_{ij} (\partial_i h_1)(\partial_j h_2)$. Из доказательства предложения 3.1 следует, что $h_1 = a \exp v$, $h_2 = b \exp v$ и $h_3 = d \exp v$, где $a,b,d \in \bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F})$. Здесь

$$\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F}) = \begin{cases} \mathcal{O}(\mathfrak{F}) & , \text{ если } v \neq 0; \\ \mathcal{O}(\mathfrak{F})/\mathcal{K} \oplus \langle x_i^{(p^{m_i})} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \rangle, & \text{ если } v = 0. \end{cases}$$

огда

$$h_3 = \exp(-v)\sum_{i,j}\bar\omega_{ij}\partial_i(a\exp v)\partial_j(b\exp v) =$$

$$= \exp v\sum_{i,j}\bar\omega_{ij}(\partial_i a + a\,\partial_i v)(\partial_j b + b\,\partial_j v),$$

ткуда

$$d = \sum_{i,j}\bar\omega_{ij}(\partial_i a + a\,\partial_i v)(\partial_j b + b\,\partial_j v). \qquad (1.15)$$

тсюда и из предложения 3.1 вытекает

Лемма 4.1. *Алгебра* $\tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F},\omega)$ *изоморфна алгебре* $\bar{O}(\mathfrak{F})$ *с законом умножения* $(a,b) \longmapsto \{a,b\}_\omega = d$, *определенным формулой* (1.15).

Выясним теперь, как выглядит формула (1.15) в случаях, когда $v \neq 0$ и $v = 0$.

4.1. Случай $v \neq 0$. По условию $v = x_t^{(p^{m_t})}$, поэтому из (1.15) получаем

$$d = \sum_{i,j=1}^{n}\bar\omega_{ij}(\partial_i a)(\partial_j b) + \bar x_t\sum_{j=1}^{n}\bar\omega_{tj}(a\,\partial_j b - b\,\partial_j a). \qquad (1.16)$$

Вычислим теперь обратную матрицу $\bar\Omega$. В нашем случае матрица Ω имеет вид (0.5) $\Omega = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Заметим, что $\mathcal{B} \in \mathrm{Mat}_n(O(\mathfrak{F}))$, причем $b_{ij}(0) = 0$ $\forall i,j$. А поскольку $\mathcal{A}^{-1} = -\mathcal{A}$, то $\Omega = (\mathrm{I} - \mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{A}$, откуда

$$\bar\Omega = \mathcal{A}^{-1}(\mathrm{I} - \mathcal{B}\,\mathcal{A})^{-1} = -\sum_{k\geqslant 0}\mathcal{A}\,(\mathcal{B}\,\mathcal{A})^k.$$

Так как $\mathcal{B} = \bar x_t\,\tilde{\mathcal{B}}$, где $\tilde{\mathcal{B}} \in \mathrm{Mat}_n(O(\mathfrak{F}))$, тогда $(\mathcal{B}\,\mathcal{A})^k = 0$, для всех $k \geqslant 2$, т.е.

$$\bar\Omega = -\mathcal{A} - \mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{A}.$$

Используя кососимметричность матрицы $\mathcal{A}$ $(\mathcal{A} = -\mathcal{A}^{\mathrm{T}})$, получаем

$$\mathcal{B}' = -\mathcal{A}\,\mathcal{B}\,\mathcal{A} = \bar x_t\{-\mathcal{A}\,R^{\mathrm{T}}G\,\mathcal{A} + \mathcal{A}\,G^{\mathrm{T}}R\,\mathcal{A}\} =$$

$$= \bar{x}_t\{(R\,\mathcal{A})^{\mathrm{T}} G\,\mathcal{A} - (G\,\mathcal{A})^{\mathrm{T}} R\,\mathcal{A}\},$$

где $R\,\mathcal{A} = \left[x_1/2 - \beta_{\tilde{1}t}\bar{x}_{\tilde{1}}, \dots, x_{n'}/2 - \beta_{\tilde{n}'t}\bar{x}_{\tilde{n}'}, x_{\tilde{1}}/2 + \beta_{1t}\bar{x}_1, \dots, x_{\tilde{n}'}/2 + \beta_{n't}\bar{x}_{n'}\right] \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathcal{O}(\mathfrak{F}))$, а $G\mathcal{A} = \pi(t)\left[\delta_{1\tilde{t}}, \dots, \delta_{n\tilde{t}}\right] \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathcal{K})$.

Замечание 4.2. Пусть $B' = (b'_{ij})$, тогда $b'_{\tilde{t}\tilde{t}} = b'_{\tilde{t}t} = b'_{t\tilde{t}} = 0$, так как $b_{tt} = b_{\tilde{t}t} = b_{t\tilde{t}} = 0$.

Таким образом, мы имеем $\bar{\Omega} = -\mathcal{A} + B'$. Подставим теперь это выражение в (1.16) и, воспользовавшись равенством $\bar{x}_t B' = 0$, получим

$$\{a,b\}_\omega = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}} a\, \partial_i b - \partial_i a\, \partial_{\tilde{i}} b) + \pi(t)\,\bar{x}_t \Big[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq t,\tilde{t}}}^{n} (x_{\tilde{i}}/2 - \beta_{\tilde{i}t}\,\pi(i)\bar{x}_{\tilde{i}})(\partial_i a\, \partial_{\tilde{t}} b - \partial_{\tilde{t}} a\, \partial_i b) - (a\, \partial_{\tilde{t}} b - b\, \partial_{\tilde{t}} a)\Big]. \quad (1.17)$$

4.2. Случай $v = 0$. Тогда из (1.15)

$$d = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\omega}_{ij}(\partial_i a)(\partial_j b). \quad (1.18)$$

Найдем теперь матрицу $\bar{\Omega}$. Аналогично, как и в предыдущем случае, из (0.5) получаем, что

$$\bar{\Omega} = -\sum_{k\geqslant 0} \mathcal{A}\,(B\,\mathcal{A})^k.$$

Но в этом случае

$$(B\,\mathcal{A})^k = (-1)^k \left[\begin{array}{c|c} S^k & 0 \\ \hline 0 & (S^k)^{\mathrm{T}} \end{array}\right],$$

поэтому

$$\bar{\Omega} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \left[\begin{array}{c|c} 0 & -(S^k)^T \\ \hline S^k & 0 \end{array}\right]. \tag{1.19}$$

Поскольку $S_{ij} = \alpha_{ij}\bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}}$, то

$$S^2 = S\,S = \left(\sum_{t_1=1}^{n'} S_{it_1} S_{t_1 j}\right) = \left(\bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}} \sum_{t_1=1}^{n'} \alpha_{it_1}\alpha_{t_1 j}\, \bar{x}_{t_1}\bar{x}_{\tilde{t}_1}\right).$$

Тогда

$$S^k = \left(\bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}} \sum_{t_1,\dots,t_{k-1}} \alpha_{it_1}\alpha_{t_1t_2}\dots\alpha_{t_{k-1}j}\bar{x}_{t_1}\dots\bar{x}_{t_{k-1}}\bar{x}_{\tilde{t}_1}\dots\bar{x}_{\tilde{t}_{k-1}}\right)$$

Легко заметить, что $S^k = 0$ для всех $k > n'$. Пусть

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k \sum_{t_1\dots t_{k-1}} \alpha_{it_1}\alpha_{t_1t_2}\dots\alpha_{t_{k-1}j}\bar{x}_{t_1}\dots\bar{x}_{t_{k-1}}\bar{x}_{\tilde{t}_1}\dots\bar{x}_{\tilde{t}_{k-1}}$$

(при $k = 1$ имеем $-\alpha_{ij}$). Отсюда

$$\mathcal{P} = \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k S^k = (f_{ij}\, \bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}}) \in \mathrm{Mat}_{n'}(\mathcal{O}(\mathfrak{F})).$$

Из (1.19) получаем

$$\bar{\Omega} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\mathcal{P}^T \\ \hline \mathcal{P} & 0 \end{array}\right].$$

Следовательно, для $i,j \in \{1,\dots,n'\}$ имеем

$$\bar{\omega}_{i\tilde{j}} = -\delta_{ij} - f_{ji}\, \bar{x}_j\bar{x}_{\tilde{i}}$$

и

$$\bar{\omega}_{\tilde{i}j} = \delta_{ij} + f_{ij}\, \bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}}.$$

Подставив эти формулы в (1.18), получим

$$\{a,b\}_\omega = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}}a\, \partial_i b - \partial_i a\, \partial_{\tilde{i}} b) + \sum_{i,j=1}^{n'} f_{ij}\, \bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}} (\partial_{\tilde{i}}a\, \partial_j b - \partial_j a\, \partial_{\tilde{i}} b). \tag{1.20}$$

Замечание 4.3. Из формулы (1.20) легко видеть, что $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F})^{(1)} = \{\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F}), \bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F})\}_{\omega} \subset \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, т.е. $\dim_{K} \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} \leqslant p^{m} - 1$.

Итак, мы показали, что умножение в алгебре $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ задается формулами (1.17) (если $v \neq 0$) и (1.20) (если $v = 0$).

§ 5. Строение алгебры $H(\mathfrak{F},\omega)$ в случае $v \neq 0$

Пусть гамильтонова форма ω имеет вид (0.3), а умножение в алгебре $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ Задается формулой (1.17). Имеет место

Теорема 5.1. *Как векторное пространство над* K *алгебра* $H(\mathfrak{F},\omega)$ *натянута на дифференцирования*

$$\bar{\mathfrak{D}}_{a} = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\omega}_{ji}(\partial_{j}a + a\,\partial_{j}v)\partial_{i}, \qquad a \in \mathcal{B}(\mathfrak{F}),$$

и имеет следующую размерность

$$\dim_{K} H(\mathfrak{F},\omega) = \begin{cases} p^{m} - 1, & \text{если } n' + 1 \equiv 0 \pmod{p}; \\ p^{m}, & \text{если } n' + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Здесь

$$\mathcal{B}(\mathfrak{F}) = \begin{cases} \mathcal{O}'(\mathfrak{F}), & \text{если } n' + 1 \equiv 0 \pmod{p}; \\ \mathcal{O}(\mathfrak{F}), & \text{если } n' + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 5.2. *В алгебре* $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ *справедливы следующие утверждения*

1) $\bar{\mathfrak{D}}_{1} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = [\,\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega), \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)\,]$;

2) *если* $n' + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, *то* $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$; *если же*

$n' + 1 \equiv 0 \pmod p$ *и элемент* $e_{\mathfrak{F}}$ *входит в многочлен* a *с ненулевым коэффициентом, то* $\bar{\mathfrak{D}}_a \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$.

Доказательство. 1) Пусть $a = x_{\tilde{t}}$, $b = x_t$, тогда из (1.17) получаем, что $\{a,b\}_\omega = \pi(t)$, следовательно $\bar{\mathfrak{D}}_1 \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$.

2) Для доказательства второго утверждения, ввиду билинейности выражения (1.17), достаточно проверить, что для любых одночленов

$$a = \prod_i x_i^{(\alpha_i)}, \qquad b = \prod_i x_i^{(\beta_i)},$$

многочлен $d = \{a,b\}_\omega = d_1 + d_2 + d_3$, где

$$d_1 = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}} a\, \partial_i b - \partial_i a\, \partial_{\tilde{i}} b),$$

$$d_2 = \pi(t)\bar{x}_t \Big[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq t,\tilde{t}}}^{n} x_i/2(\partial_i a\, \partial_{\tilde{t}} b - \partial_{\tilde{t}} a\, \partial_i b) - (a\, \partial_{\tilde{t}} b - b\, \partial_{\tilde{t}} a)\Big],$$

$$d_3 = -\pi(t)\bar{x}_t \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq t,\tilde{t}}}^{n} \beta_{\tilde{i}t}\, \pi(i)\bar{x}_{\tilde{i}}(\partial_i a\, \partial_{\tilde{t}} b - \partial_{\tilde{t}} a\, \partial_i b),$$

может содержать одночлен $e_{\mathfrak{F}}$ только с коэффициентом $\pm(n'+1)$. Действительно, согласно работе [21], $e_{\mathfrak{F}}$ может войти лишь в один из многочленов d_2 и d_3. В многочлене d_2 элемент $e_{\mathfrak{F}}$ может получиться лишь при

$$a = \prod_{i\neq t} x_i^{(\alpha_i)}, \qquad b = \prod_{i\neq t} x_i^{(\beta_i)}, \qquad \alpha_i + \beta_i = p^{m_i} - 1,$$

для всех $i \neq t,\tilde{t}$, $\alpha_{\tilde{t}} + \beta_{\tilde{t}} = p^{m_{\tilde{t}}}$ (причем $\alpha_{\tilde{t}} \neq 0$). Но тогда $d = \{a,b\}_\omega = d_2 = \gamma\, e_{\mathfrak{F}}$, где

$$\gamma = \pi(t)\Big\{1/2 \sum_{i\neq t,\tilde{t}} \prod_{j\neq t,\tilde{t}} \binom{p^{m_j}-1}{\alpha_j} \Big[\alpha_i \binom{p^{m_{\tilde{t}}}-1}{\alpha_{\tilde{t}}} - \beta_i \binom{p^{m_{\tilde{t}}}-1}{\alpha_{\tilde{t}}-1} \Big] -$$

$$- \prod_{j\neq t,\tilde{t}} \begin{Bmatrix} p^{m_j}-1 \\ \alpha_j \end{Bmatrix} \Big[\begin{Bmatrix} p^{m_{\tilde{t}}}-1 \\ \alpha_{\tilde{t}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} p^{m_{\tilde{t}}}-1 \\ \alpha_{\tilde{t}}-1 \end{Bmatrix} \Big] \Big\} =$$

$$= \pi(t) \prod_{j\neq t,\tilde{t}} (-1)^{\alpha_j} \Big\{ 1/2 \sum_{i\neq t,\tilde{t}} \Big[\alpha_i (-1)^{\alpha_{\tilde{t}}} - (p^{m_i} - 1 - \alpha_i)(-1)^{\alpha_{\tilde{t}}-1} \Big]$$

$$- \Big[(-1)^{\alpha_{\tilde{t}}} - (-1)^{\alpha_{\tilde{t}}-1} \Big] \Big\} = \pi(t)(-1)^{\alpha_{\tilde{t}}-1} \prod_{j\neq t,\tilde{t}} (-1)^{\alpha_j} \Big\{ 1/2 \sum_{i\neq t,\tilde{t}} 1$$

$$+ 2 \Big\} = - \pi(t) \prod_{j\neq t} (-1)^{\alpha_j} \Big\{ 1/2(n - 2) + 2 \Big\} = \pm (n' + 1).$$

В многочлене же d_3 элемент $e_{\mathfrak{F}}$ может присутствовать только при

$$a = \prod_{i\neq t,\tilde{k}} x_i^{(\alpha_i)}, \qquad b = \prod_{i\neq t,\tilde{k}} x_i^{(\beta_i)}, \qquad \alpha_i + \beta_i = p^{m_i} - 1,$$

для всех $i \neq \tilde{t}, k$, а $\alpha_{\tilde{t}} + \beta_{\tilde{t}} = p^{m_{\tilde{t}}}$ и $\alpha_k + \beta_k = p^{m_k}$. Тогда $d = d_3 = \gamma\, e_{\mathfrak{F}}$, где

$$\gamma = - \pi(t) \beta_{\tilde{k}t}\, \pi(k) \prod_{j\neq t,k,\tilde{t},\tilde{k}} \begin{Bmatrix} p^{m_j}-1 \\ \alpha_j \end{Bmatrix} \Big\{ \begin{Bmatrix} p^{m_k}-1 \\ \alpha_k-1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p^{m_{\tilde{t}}}-1 \\ \alpha_{\tilde{t}} \end{Bmatrix} -$$

$$- \begin{Bmatrix} p^{m_k}-1 \\ \alpha_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p^{m_{\tilde{t}}}-1 \\ \alpha_{\tilde{t}}-1 \end{Bmatrix} \Big\} = 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 5.3. Если $n' + 1 \equiv 0 \pmod p$, то множество элементов $\bar{\mathfrak{D}}_a$, $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, образует подалгебру и даже идеал в $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ коразмерности 1, поэтому $\dim_K \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} \leqslant p^m - 1$ в этом случае.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Пусть $H(\mathfrak{F})$ – градуированная алгебра Ли (см. §3 главы 0). В силу предложений 3.1 и 3.2 главы 0, имеем

$$\tilde{H}(\mathfrak{F}) = H(\mathfrak{F}) \oplus \langle \mathfrak{D}_{x_j^{(p^{m_j})}} \mid 1 \leqslant j \leqslant n \rangle \oplus \langle \mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \rangle,$$

где $\mathfrak{D}_a = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}} a\, \partial_i - \partial_i a\, \partial_{\tilde{i}})$, $\dim_K H(\mathfrak{F}) = p^m - 2$ и $\dim_K \tilde{H}(\mathfrak{F}) = p^m + n - 1$. В работе [21] показано, что в алгебре $\tilde{H}(\mathfrak{F})$ имеют место включения

$$H(\mathfrak{F}) \subseteq gr\, H(\mathfrak{F},\omega) \subseteq gr\, \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} \subseteq gr\, \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega) \subseteq \tilde{H}(\mathfrak{F}). \quad (1.21)$$

Здесь $gr\, L$ – ассоциированная градуированная алгебра, соответствующая фильтрованной алгебре Ли L. Из формул (1.14) и вида $\bar{\Omega}$ получаем

$$\bar{\mathfrak{D}}_a = \mathfrak{D}_a + \pi(t)\, \bar{x}_t \sum_{i \neq t, \tilde{t}} (x_i/2 - \beta_{\tilde{i} t}\, \pi(i) \bar{x}_{\tilde{i}})(\partial_i a\, \partial_{\tilde{t}} - \partial_{\tilde{t}} a\, \partial_i) - a\, \pi(t)\, \bar{x}_t \partial_{\tilde{t}}.$$

Отсюда находим $\bar{\mathfrak{D}}_1$ и $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}}$:

$$\bar{\mathfrak{D}}_1 = -\pi(t)\, \bar{x}_t \partial_{\tilde{t}} = -\pi(t)\, \mathfrak{D}_{x_t^{(p^{m_t})}},$$

$$\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}},$$

то есть $\mathfrak{D}_{x_t^{(p^{m_t})}} \in gr\, \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ и $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \in gr\, \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$, поэтому

$$H(\mathfrak{F}) \oplus \langle \mathfrak{D}_{x_t^{(p^{m_t})}} \rangle \oplus \langle \mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \rangle \subseteq gr\, \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega).$$

А так как $\dim gr\, \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega) = \dim \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega) = p^m$ (см. предложение 3.1), то

$$\mathrm{gr}\ \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega) = H(\mathfrak{F}) \oplus \langle \mathfrak{D}_{x_t^{(p^{m_t})}} \rangle \oplus \langle \mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \rangle .$$

В силу леммы 5.2 $\mathfrak{D}_{x_t^{(p^{m_t})}} \in \mathrm{gr}\ \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$, следовательно

$$H(\mathfrak{F}) \oplus \langle \mathfrak{D}_{x_t^{(p^{m_t})}} \rangle \subseteq \mathrm{gr}\ \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)},$$

откуда

$$p^{m} - 1 \leqslant \dim \mathrm{gr}\ \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} \leqslant p^{m}. \tag{1.22}$$

Пусть $n' + 1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, тогда по лемме 5.2 $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \mathrm{gr}\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$, поэтому $\dim \mathrm{gr}\ \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = p^{m}$, а значит $\dim \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = \dim \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$, откуда

$$\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega) = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} = H(\mathfrak{F},\omega).$$

Если же $n' + 1 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$, то из замечания 5.3 и неравенств (1.22) следует, что $\dim \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = p^{m} - 1$. Другими словами, в этом случае $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = \{\ \bar{\mathfrak{D}}_{a},\ \ a \in \mathcal{O}'(\mathfrak{F})\ \}$.

Заметим, что x_t, $x_{\tilde{t}} \in \mathcal{O}'(\mathfrak{F})$, следовательно, также как и в лемме 5.2, можно показать, что $\bar{\mathfrak{D}}_1 \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$, отсюда $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \mathrm{gr}\ \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$, т.е. неравенства (1.22) справедливы и для $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$. Из включения $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} \subseteq \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$, замечания 5.3 и неравенств (1.22) для $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$ имеем

$$\dim_{K} \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} = p^{m} - 1.$$

Тогда $H(\mathfrak{F},\omega) = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} \subset \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$. Теорема доказана.

Следствие 5.4. *Пусть* $v \neq 0$, *тогда* $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$

Следствие 5.5. *Пусть* $v \neq 0$ *и* $n' + 1 \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$, *тогда алгебра* $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ *– простая алгебра Ли.*

§ 6. Строение алгебры $H(\mathfrak{F},\omega)$ в случае $\upsilon = 0$

Пусть гамильтонова форма ω имеет вид (0.4), а умноже-
е в алгебре $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)$ определяется формулой (1.20). Положим

$$= \langle x^{(\beta)} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}) \mid \exists\ \beta_i \in (\beta)=(\beta_1,\dots,\beta_n)\ \&\ 1 \leqslant \beta_i < p^{m_i}-1 \rangle,$$

$$= \langle x^{(\beta)} \mid (\beta)\neq(0);\forall j\ \beta_j=0 \text{ или } \beta_j=p^{m_j}-1;\exists\ \beta_i \mid \beta_i=p^{m_i}-1, \text{а } \beta_{\tilde{i}}=0 \rangle$$

Лемма 6.1. *Пусть* $z \in V_0 \oplus V_1$, *тогда* $z \in \bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F})^{(1)}$.

Доказательство. Рассмотрим два случая

1) Пусть $z = x_{i_1}^{(\beta_1)}\dots x_{i_k}^{(\beta_k)} \in V_0$. По условию, существует
мер $i_l \in \{i_1,\dots,i_k\}$ такой, что $1 \leqslant \beta_l < p^{m_{i_l}}-1$. Тогда,
ложив $b = x_{\tilde{i}_k}$, а $a = x_{i_1}^{(\beta_1)}\dots x_{i_l}^{(\beta_l+1)}\dots x_{i_k}^{(\beta_k)}$, из (1.20)
лучим $\{a,b\}_\omega = \pi(\tilde{i}_l)\ z$.

2) Пусть теперь $z = \bar{x}_{i_1}\dots\bar{x}_{i_k} \in V_1$, т.е. существует
мер $i_l \in \{i_1,\dots,i_k\}$ такой, что $\tilde{i}_l \notin \{i_1,\dots,i_k\}$. Поло-
м $a = z$, $b = x_{i_l} x_{\tilde{i}_l}$ и получаем $\{a,b\}_\omega = \pi(i_l)\ z$. Лем-
доказана.

Обозначим через S^k_{ij} – i,j-й элемент матрицы S^k, тогда
формулы для f_{ij} из §4 получаем, что

$$f_{ij}\ \bar{x}_i\bar{x}_{\tilde{j}} = \sum_{k=1}^{n'} (-1)^k\ S^k_{ij}.$$

Лемма 6.2. *Пусть* a *и* b *– мономы из* $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F})$. *Элемент*
будет входить в правую часть формулы (1.20) *с ненулевым*
эффициентом лишь в двух случаях :

1) $a = x_{\tilde{i}}^{(p^{m_{\tilde{i}}})}$, $b = x_j^{(p^{m_j})}$, *если* $n' = 1$ *и* $i = j$; *или же*
если $n' > 1$, $i \neq j$ *и* $S^{n'-1}_{ij} \neq 0$;

2) $a = x_{\tilde i}\bar a$, $b = x_i \bar b$, *если* $S^k_{ii} \neq 0$ *для некоторого* k.

Здесь $\bar a$ и $\bar b$ – мономы из $\mathcal{O}(\mathfrak{F})$ такие, что $\bar a\, \bar b\, S^k_{ii} = e_{\mathfrak{F}}$, а $i, j \in \{1,\dots,n\}$.

Доказательство. Согласно работе [21], в первом слагаемом формулы (1.20) элемент $e_{\mathfrak{F}}$ можно получить только при $n = 2$ и $a = x_{\tilde 1}^{(p^{m_{\tilde 1}})}$, $b = x_1^{(p^{m_1})}$. Рассмотрим второе слагаемое

$$\sum_{i,j} f_{ij}\, \bar x_i \bar x_{\tilde j} (\partial_{\tilde i} a\, \partial_j b - \partial_j a\, \partial_{\tilde i} b).$$

Отметим, что многочлен f_{ij} зависит от четного числа переменных, входящих в каждый одночлен в максимальной степени. Поэтому a и b нужно выбирать таким образом, чтобы элемент

$$\partial_{\tilde i} a\, \partial_j b - \partial_j a\, \partial_{\tilde i} b \tag{1.23}$$

содержал бы четное число переменных, которые при этом должны иметь максимальные степени.

1) Пусть $a = x_{\tilde i}^{(p^{m_{\tilde i}})}$, тогда $\partial_{\tilde i} a\, \partial_j b = \bar x_{\tilde i}\, \partial_j b$, поэтому, чтобы получить моном $e_{\mathfrak{F}}$ необходимо, чтобы $\partial_j b = \bar x_j \tilde b$, а это возможно лишь при $b = x_j^{(p^{m_j})}$. Тогда из (1.20) получаем

$$\{a,b\}_\omega = \begin{cases} f_{ij}\bar x_i \bar x_j \bar x_{\tilde i} \bar x_{\tilde j}, & \textit{если} \quad i \neq j; \\ \bar x_i \bar x_{\tilde i}, & \textit{если} \quad i = j. \end{cases}$$

Следовательно, если $n = 2$, то $\{a,b\}_\omega = e_{\mathfrak{F}}$ при $i = j$; если же $n > 2$, то необходимо рассматривать $i \neq j$, причем элемент $e_{\mathfrak{F}}$ получится в (1.20) только для одного слагаемого формулы f_{ij} из §4 при $k = n' - 1$.

2) Пусть теперь $a, b \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$. Для того, чтобы получить

моном $e_{\mathfrak{F}}$ в формуле (1.20) необходимо, чтобы элемент (1.23) содержал произведение $\bar{x}_{\tilde{i}}\bar{x}_j$ при $i \neq j$ и не содержал переменных x_i, $x_{\tilde{i}}$ при $i = j$.

Рассмотрим $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$ и

$$a = x_{\tilde{i}}^{(\gamma_{\tilde{i}})} x_j^{(\gamma_j)} \bar{a}, \qquad b = x_{\tilde{i}}^{(\beta_{\tilde{i}})} x_j^{(\beta_j)} \bar{b},$$

где $\gamma_{\tilde{i}} + \beta_{\tilde{i}} = p^{m_{\tilde{i}}}$, $\gamma_j + \beta_j = p^{m_j}$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не зависят от $x_{\tilde{i}}$, x_j. Тогда

$$\partial_{\tilde{i}}a\, \partial_j b - \partial_j a\, \partial_{\tilde{i}} b = \bar{a}\, \bar{b}\, \bar{x}_{\tilde{i}}\, \bar{x}_j \left\{ \binom{p^{m_{\tilde{i}}}-1}{\gamma_{\tilde{i}}-1}\binom{p^{m_j}-1}{\gamma_j} - \binom{p^{m_{\tilde{i}}}-1}{\gamma_{\tilde{i}}}\binom{p^{m_j}-1}{\gamma_j-1} \right\} = 0.$$

Таким образом, остается последняя возможность $i = j$, т.е. $a = x_{\tilde{i}}\bar{a}$, $b = x_i\bar{b}$, откуда $\partial_{\tilde{i}}a\, \partial_j b - \partial_j a\, \partial_{\tilde{i}} b = \bar{a}\, \bar{b}$. Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть* ω *- неразложимая гамильтонова форма. Тогда* $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$.

Доказательство. Пусть ω - неразложимая форма (см. §3 главы 0). В силу предложения 3.4 главы 0 матрица α имеет вид (0.8) или (0.9). Рассмотрим три случая.

1) $\alpha = \mathcal{J}_{n'}(0)$ и $n' = 1$ (т.е. $n = 2$). Тогда $\alpha = \alpha_{11} = 0$. Согласно лемме 6.2, моном $e_{\mathfrak{F}}$ можно получить в формуле (1.20) только при

$$a = x_{\tilde{1}}^{(p^{m_{\tilde{1}}})}, \qquad b = x_1^{(p^{m_1})}.$$

2) $a = \mathcal{J}_{n'}(0)$ и $n' > 1$, т.е.

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Но тогда

$$a^{n'-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

откуда получаем, что $S_{ij}^{n'-1} \neq 0$ лишь для $i = 1$, $j = n'$. Поэтому необходимо положить $a = x_{\tilde{1}}^{(p^{m_{\tilde{1}}})}$, $b = x_{n'}^{(p^{m_{n'}})}$. А поскольку

$$S_{1n'} = S_{1n'}^2 = \dots = S_{1n'}^{n'-2} = 0 = S_{1n'}^{n'},$$

то

$$f_{1n'} = (-1)^{n'-1} \sum_{t_1 \dots t_{n'-2}} a_{1t_1} a_{t_1 t_2} \dots a_{t_{n'-2} n'} \bar{x}_{t_1} \dots \bar{x}_{t_{n'-2}} \bar{x}_{\tilde{t}_1} \dots \bar{x}_{\tilde{t}_{n'-2}} .$$

Легко видеть, что в последней формуле отличным от нуля будет лишь произведение $a_{12}\, a_{23} \dots a_{n'-1,n'} = 1$, откуда

$$f_{1n'} = (-1)^{n'-1} \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n'-1} \bar{x}_{\tilde{2}} \dots \bar{x}_{\widetilde{n'-1}} .$$

Из (1.20) получаем

$$\{a,b\}_\omega = (-1)^{n'-1} e_{\mathfrak{F}},$$

т.е. $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$. Необходимо подчеркнуть, что никаким другим способом элемент $e_{\mathfrak{F}}$ мы не получим (т.к. $S_{ii}^k = 0$ для всех i и k).

3) Пусть a имеет вид (0.9). В данном случае легко проверяется, что $S_{ii}^k = 0$ для всех k, кроме $k = l$. Рассмотрим $i \in \{1,\dots,r\}$, тогда

$$f_{ii} = (-1)^l a_{i,i+r} a_{i+r,i+2r} \ldots a_{i+(l-2)r,i+(l-1)r} \times$$

$$\times\, a_{i+(l-1)r,i} z_{ir}, \qquad (1.24)$$

где

$$z_{ir} = \prod_{t=1}^{l-1} \bar{x}_{i+tr} \bar{x}_{\widetilde{i+tr}}.$$

Из (1.24) и (0.9) получаем, что $f_{ii} = (-1)^l \lambda\, z_{ir}$. Заметим, что

$$f_{ii} = f_{i+r,i+r} = \ldots = f_{i+(l-1)r,i+(l-1)r}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Обозначим через $\bar{z}_{ir}$ моном $\bar{x}_i \bar{x}_{\tilde{i}} z_{ir}$. Положим $a_1 = x_{\tilde{1}} \bar{a}_1$, $b_1 = x_1$, где $\bar{a}_1 = \prod_{i=2}^{r} \bar{z}_{ir}$, отсюда

$$\{a_1, b_1\}_\omega = \bar{a}_1 + f_{11} \bar{x}_1 \bar{x}_{\tilde{1}} \bar{a}_1 = \bar{a}_1 + (-1)^l \lambda\, e_{\mathfrak{F}}. \qquad (1.25)$$

Пусть $a_2 = x_{\tilde{2}} \bar{a}_2$, $b_2 = x_2$, где $\bar{a}_2 = \prod_{i=3}^{r} \bar{z}_{ir}$, тогда

$$\{a_2, b_2\}_\omega = \bar{a}_2 + (-1)^l \lambda\, \bar{a}_1. \qquad (1.26)$$

Проводя эту процедуру r раз, мы получим, что для $a_r = x_{\tilde{r}}$, $b_r = x_r$

$$\{a_r, b_r\}_\omega = 1 + (-1)^l \lambda\, \bar{a}_{r-1}, \qquad (1.27)$$

где $\bar{a}_{r-1} = \bar{z}_{rr}$. Из соотношений (1.25), (1.26) и (1.27) получаем последовательность $\{u_i\}$ элементов из $\bar{O}(\mathfrak{F})^{(1)}$:

$$u_1 = \bar{a}_1 + (-1)^l \lambda e_{\mathfrak{F}},$$

$$u_2 = \bar{a}_2 + (-1)^l \lambda \bar{a}_1 + (-1)^{l+1} \lambda u_1 = \bar{a}_2 - \lambda^2 e_{\mathfrak{F}},$$

. . . .

$$u_r = 1 + (-1)^l \lambda \bar{a}_{r-1} + (-1)^{l+1} \lambda u_{r-1} = 1 + (-1)^{r(l+1)-1} \lambda^r e_{\mathfrak{F}}.$$

Откуда $\bar{\mathfrak{D}}_{u_r} = (-1)^{r(l+1)-1} \lambda^r\, \bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{\mathrm{H}}(\mathfrak{F}, \omega)^{(1)}$. Лемма доказана.

Замечание 6.4. В силу замечания 4.3 одночлены $x_i^{(p^{m_i})} \notin \bar{O}(\mathfrak{F})^{(1)}$, следовательно, в случае, когда ω – неразложимая форма с матрицей $\alpha = \mathcal{J}_n, (0)$, $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$. Поэтому в этом случае алгебра $H(\mathfrak{F},\omega) = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} \neq \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$ и имеет размерность

$$\dim_K H(\mathfrak{F},\omega) = p^m - 2.$$

В случае же, когда матрица α имеет вид (0.9), многочлен u_r мы получали с помощью элементов из V_0, которые согласно лемме 6.1 содержатся в $\bar{O}(\mathfrak{F})^{(1)}$. А значит, в данном случае $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in H(\mathfrak{F},\omega) = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$ и

$$\dim_K H(\mathfrak{F},\omega) = p^m - 1.$$

Лемма 6.5. *Пусть* $\omega = \sum_{i=1}^{t} \omega_i$, *где* ω_i *– неразложимые гамильтоновы формы с матрицами* α_i *вида* (0.8) ($t > 1$), *тогда, если многочлен* u *содержит моном* $e_{\mathfrak{F}}$, *то* $\bar{\mathfrak{D}}_u \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$.

Доказательство. По условию

$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{r_1}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mathcal{J}_{r_t}(0) \end{bmatrix}, \quad t \geqslant 2.$$

Легко заметить, что $S_{ij}^{n'-1} = 0$ для всех $i,j \in \{1,\dots,n\}$ и $S_{ii}^{k} = 0$ для всех i и k. Отсюда и леммы 6.2 имеем $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$. Лемма доказана.

Лемма 6.6. *Пусть* $\omega = \sum_{i=1}^{t} \omega_i$, *где* ω_i *– неразложимые гамильтоновы формы с матрицами* α_i *вида* (0.9), *тогда* $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} = H(\mathfrak{F},\omega)$.

Доказательство. По условию

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_t \end{bmatrix},$$

где

$$a_i = \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ \mathcal{J}_{r_i}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_i \neq 0,$$

а $n' = r_1 l_1 + \ldots + r_t l_t$. Доказательство проведем аналогично случаю 3) леммы 6.3. Обозначим через n_i сумму $r_1 l_1 + \ldots + r_i l_i$, тогда $n' = n_t$. Рассмотрим $i \in \{1,\ldots,r_1\}$, тогда

$$f_{ii} = (-1)^{l_1}\lambda_1 z_{i,r_1}. \tag{1.28}$$

Аналогично, если $i \in \{n_{j-1}+1,\ldots,n_{j-1}+r_j\}$ для некоторого j из $\{2,3,\ldots,t\}$, то

$$f_{ii} = (-1)^{l_j}\lambda_j z_{i,r_j}. \tag{1.29}$$

Положим $a_{11} = x_{\tilde 1}\bar{a}_{11}$, $b_{11} = x_1$, $\bar{a}_{11} = \prod_{i=2}^{r_1} \bar{z}_{i,r_1} \prod_{j=2}^{t} \prod_{k=n_{j-1}+1}^{n_{j-1}+r_j} \bar{z}_{k,r_j}$, отсюда

$$\{a_{11}, b_{11}\}_\omega = \bar{a}_{11} + (-1)^{l_1}\lambda_1 e_{\mathfrak{F}}.$$

Через r_1 шагов, для $a_{1r_1} = x_{\tilde{r}_1}\bar{a}_{1r_1}$, $b_{1r_1} = x_{r_1}$ и $\bar{a}_{1r_1} = \prod_{j=2}^{t} \prod_{k=n_{j-1}+1}^{n_{j-1}+r_j} \bar{z}_{k,r_j}$, получим

$$\{a_{1r_1}, b_{1r_1}\}_\omega = \bar{a}_{1r_1} + (-1)^{l_1}\lambda_1 \bar{a}_{1,r_1-1}.$$

Далее, положим $a_{21} = x_{\widetilde{n_1+1}}\bar{a}_{21}$, $b_{21} = x_{n_1+1}$, $\bar{a}_{21} = \prod_{i=n_1+2}^{n_1+r_2} \bar{z}_{i,r_2} \times$ $\times \prod_{j=3}^{t} \prod_{k=n_{j-1}+1}^{n_{j-1}+r_j} \bar{z}_{k,r_j}$ и получим

$$\{a_{21}, b_{21}\}_\omega = \bar{a}_{21} + (-1)^{l_2}\lambda_2\bar{a}_{1r_1}.$$

Очевидно, что через $r = r_1 + \ldots + r_t$ шагов придем к соотношению

$$\{a_{tr_t}, b_{tr_t}\}_\omega = 1 + (-1)^{l_t}\lambda_t\bar{a}_{t,r_t-1},$$

где $a_{tr_t} = x_{\widetilde{n_{t-1}+r_t}}$, $b_{tr_t} = x_{n_{t-1}+r_t}$, $\bar{a}_{t,r_t-1} = \bar{z}_{n_{t-1}+r_t,r_t}$.

Также как и в лемме 6.3 мы приходим к цепочке многочленов из $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F})^{(1)}$:

$$u_{11} = \{a_{11}, b_{11}\}_\omega = \bar{a}_{11} + (-1)^{l_1}\lambda_1 e_{\mathfrak{F}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{1r_1} = \{a_{1r_1}, b_{1r_1}\}_\omega + (-1)^{l_1+1}\lambda_1 u_{1,r_1-1} = \bar{a}_{1r_1} + (-1)^{r_1(l_1+1)-1}\lambda_1^{r_1} e_{\mathfrak{F}},$$

$$u_{21} = \{a_{21}, b_{21}\}_\omega + (-1)^{l_2+1}\lambda_2 u_{1r_1} = \bar{a}_{21} + (-1)^{r_1(l_1+1)+l_2}\lambda_1^{r_1}\lambda_2 e_{\mathfrak{F}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{tr_t} = 1 + (-1)^{n_t+r-1}\lambda_1^{r_1}\ldots\lambda_t^{r_t} e_{\mathfrak{F}}.$$

В таком случае $\bar{\mathfrak{D}}_{u_{t,r_t}} = (-1)^{n'+r-1}\lambda_1^{r_1}\ldots\lambda_t^{r_t}\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$. А так как многочлены u_{ij} получены с помощью элементов из V_0, которые в силу леммы 6.1, лежат в $\bar{\mathcal{O}}(\mathfrak{F})^{(1)}$, то $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$. Из формулы (1.14) легко получить равенство $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}}$. Используя это замечание и имея в виду (1.21), получаем включение

$$H(\mathfrak{F}) \oplus \langle \mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \rangle \subseteq gr\, \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)},$$

откуда $\dim \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} \geqslant p^m - 1$. Включение $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} \subseteq \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$ и замечание 4.3 дают нам заключительное соотношение

$$\dim \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)} = \dim \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = p^m - 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.7. *Пусть* $\omega = \sum_{i=1}^{t} \omega_i + \omega_0$, *где* ω_i *- неразложимые гамильтоновы формы с матрицами* α_i *вида* (0.9), $1 \leqslant i \leqslant t$, *а* ω_0 *- неразложимая форма с матрицей* α_0 *вида* (0.8), *тогда* $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$ *и* $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$.

Доказательство. Из условия имеем

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots \;\; \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 \;\; \cdots & \alpha_t & 0 \\ 0 \;\; \dots & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \\ \mathcal{J}_{r_i}(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_i \neq 0, \quad n_t = \sum_{j=1}^{t} r_j l_j,$$

$$\alpha_0 = \mathcal{J}_{n_0}(0), \qquad\qquad n' = n_t + n_0.$$

Поскольку ω - разложимая форма, то $E = \bigoplus_{i=1}^{t} E_i$. Пусть $\mathfrak{F}_i$ - флаг в пространстве E_i и $e_{\mathfrak{F}_i}$ - максимальный элемент в $\mathcal{O}(\mathfrak{F}_i)$. Тогда $e_{\mathfrak{F}_0} = \prod_{j=1}^{n_0} \bar{x}_{n_t+j} \bar{x}_{\widetilde{n_t+j}}$.

Легко заметить, что $n' > 1$ и $S_{ij}^{n'-1} = 0$ при $i \neq j$, поэтому, согласно лемме 6.2, элемент $e_{\mathfrak{F}}$ может появиться в формуле (1.20) если $S_{ii}^{k} \neq 0$ для некоторого k. Рассуждая аналогично, как и в доказательстве леммы 6.6, получаем, что для $i \in \{1,\dots,n_t\}$ $f_{ii} \neq 0$, а для $i \in \{n_t+1,\dots,n_t+n_0\}$ $f_{ii} = 0$. Таким образом, моном $e_{\mathfrak{F}}$ можно получить лишь при $a = x_{\tilde{i}}\bar{a}$, $b = x_i\bar{b}$, $i \in \{1,\dots,n_t\}$.

Замечание 6.8. В дальнейшем, не уменьшая общности, будем полагать, что $\bar{b} = 1$, а $\bar{a}\, S^{k}_{i\,i} = e_{\mathfrak{F}}$. В самом деле, если $a = x_{\tilde{i}}\bar{a}$, $b = x_i\bar{b}$, $a' = x_{\tilde{i}}\bar{a}\bar{b}$, $b' = x_i$, то из (1.20) имеем

$$\{a',b'\}_{\omega} = \bar{a}\,\bar{b} + \nu e_{\mathfrak{F}} \in \bar{O}(\mathfrak{F})^{(1)},$$

где $\nu \neq 0$ и $\nu \in K$. С другой стороны

$$\{a,b\}_{\omega} = \{a',b'\}_{\omega} + h,$$

здесь $h \in V_0$ (следовательно $h \in \bar{O}(\mathfrak{F})^{(1)}$). Откуда

$$\{a,b\}_{\omega} \equiv \{a',b'\}_{\omega} (\mathrm{mod}\ V_0).$$

Продолжим доказательство леммы 6.7. Итак, мы получили, что $a = x_{\tilde{i}_1}\bar{a}$, $b = x_{i_1}$, $i_1 \in \{1,\ldots,r_1\}$ для $j_1 = 1$ или $i_1 \in \{n_{j_1-1}+1,\ldots, n_{j_1-1}+r_{j_1}\}$ для $j_1 \in \{2,3,\ldots,t\}$. Из формул (1.28) и (1.29) получаем, что $\bar{a}$ может иметь лишь следующий вид

$$\bar{a} = \bar{a}(i_1) = e_{\mathfrak{F}_0} \prod_{\substack{k_1=\tau_{j_1}+1\\ k_1\neq i_1}}^{\tau_{j_1}+r_{j_1}} \bar{z}_{k_1,r_{j_1}} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq j_1}}^{t} \prod_{k_2=\tau_j+1}^{\tau_j+r_j} \bar{z}_{k_2,r_j},$$

где $\tau_j = (1-\delta_{j1})n_{j-1}$. Но тогда

$$\{a,b\}_{\omega} = \bar{a} + (-1)^{l_{j_1}}\lambda_{j_1} e_{\mathfrak{F}}. \tag{1.30}$$

Заметим, что $\bar{a} = e_{\mathfrak{F}'}$, для некоторого флага $\mathfrak{F}'$ в пространстве $E' \subseteq E$. Поэтому, проведя рассуждения аналогичные лемме 6.2, мы придем к тому, что моном $\bar{a}$ в формуле (1.20) можно получить только при

1) $a = x_{\tilde{i}_1}\bar{a}$, $b = x_{i_1}$ (в первом слагаемом формулы (1.20));

2) $a_1 = x_{\tilde{i}_2}\bar{a}_1$, $b_1 = x_{i_2}$, где $i_2 \neq i_1$ и $i_2 \in \{1,\ldots,r_1\}$ для $j_2 = 1$

или $l_2 \in \{n_{j_2-1}+1,\dots,n_{j_2-1}+r_{j_2}\}$ для $j_2 \in \{2,3,\dots,t\}$ (во втором слагаемом формулы (1.20)).

В первом случае мы имеем соотношение (1.30), а во втором

$$\{a_1,b_1\}_\omega = \bar{a}_1 + (-1)^{l_{j_2}}\lambda_{j_2}\bar{a}, \tag{1.31}$$

где моном $\bar{a}_1$ имеет следующий вид

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_1(l_1,l_2) = e_{\mathfrak{F}_0} \prod_{\substack{k_1=\tau_{j_1}+1 \\ k_1\neq l_1}}^{\tau_{j_1}+r_{j_1}} \bar{z}_{k_1,r_{j_1}} \prod_{\substack{k_2=\tau_{j_2}+1 \\ k_2\neq l_2}}^{\tau_{j_2}+r_{j_2}} \bar{z}_{k_2,r_{j_2}} \times$$

$$\times \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq j_1,j_2}}^{t} \prod_{k_3=\tau_j+1}^{\tau_j+r_j} \bar{z}_{k_3,r_j}.$$

Здесь j_2 может быть равно j_1, но $l_2 \neq l_1$. Далее, рассуждая аналогично, мы получим, что $\bar{a}_1$ можно получить лишь в (1.31) и при $a_2 = x_{\tilde{l}_3}\bar{a}_2$, $b_2 = x_{l_3}$, где $l_3 \neq l_1,l_2$, а

$$\{a_2,b_2\}_\omega = \bar{a}_2 + (-1)^{l_{j_3}}\lambda_{j_3}\bar{a}_1, \tag{1.32}$$

и т.д. Отметим, что через μ шагов будем иметь соотношение

$$\{a_\mu,b_\mu\}_\omega = e_{\mathfrak{F}_0} + (-1)^{l_{j_{\mu+1}}}\lambda_{j_{\mu+1}} e_{\mathfrak{F}_0}\bar{z}_{l_{\mu+1},r_{j_{\mu+1}}}. \tag{1.33}$$

Обозначим через V_2 линейную оболочку элементов вида (1.30), (1.31), (1.32) и т.д., до (1.33), тогда $V_2 \subseteq \bar{O}(\mathfrak{F})^{(1)}$. В пространстве V_2, также как и в лемме 6.6, можно выбрать базис $u_1,\dots,u_\beta$, где

$$u_1 = \bar{a}(l_1) + (-1)^{l_1}\lambda_1 e_{\mathfrak{F}}, \qquad (l_1=1),$$

$$u_2 = \bar{a}(i_1) + (-1)^{l_1}\lambda_1 e_{\mathfrak{F}}, \qquad (i_1=2),$$

. . . .

$$u_{r_1} = \bar{a}(i_1) + (-1)^{l_1}\lambda_1 e_{\mathfrak{F}}, \qquad (i_1=r_1),$$

$$u_{r_1+1} = \bar{a}(i_1) + (-1)^{l_2}\lambda_2 e_{\mathfrak{F}}, \qquad (i_1=n_1+1),$$

. . . .

$$u_r = \bar{a}(i_1) + (-1)^{l_t}\lambda_t e_{\mathfrak{F}}, \qquad (i_1=n_{t-1}+r_t),$$

$$u_{r+1} = \bar{a}_1(i_1,i_2) + (-1)^{2(l_1+1)-1}\lambda_1^2 e_{\mathfrak{F}}, \qquad (i_1=1, i_2=2),$$

. . . .

$$u_{r+r_1-1} = \bar{a}_1(i_1,i_2) + (-1)^{2(l_1+1)-1}\lambda_1^2 e_{\mathfrak{F}}, \qquad (i_1=1, i_2=r_1),$$

$$u_{r+r_1} = \bar{a}_1(i_1,i_2) + (-1)^{2(l_1+1)-1}\lambda_1^2 e_{\mathfrak{F}}, \qquad (i_1=2, i_2=3),$$

. . . .

$$u_\beta = e_{\mathfrak{F}_0} + (-1)^{n_t+r-1}\lambda_1^{r_1}\ldots\lambda_t^{r_t}e_{\mathfrak{F}}.$$

Здесь $\bar{a}$ зависит от i_1; $\bar{a}_1$ зависит от i_1 и i_2; и т.д. Подчеркнем, что мономы $e_{\mathfrak{F}_0}$ и $e_{\mathfrak{F}}$ не лежат в V_2. Однако, моном $e_{\mathfrak{F}_0}$ можно получить не только в первом слагаемом формулы (1.20) (как в (1.33)), но и во втором слагаемом. В силу леммы 6.3 это возможно только в случае

$$a = x^{(p_{\widetilde{n_t+1}}^{m_{\widetilde{n_t+1}}})}, \qquad b = x^{(p_{n_t+n_0}^{m_{n_t+n_0}})}.$$

Тогда $\{a,b\}_\omega = (-1)^{n_0-1}e_{\mathfrak{F}_0}$, т.е. $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}_0}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$. А так как $u_\beta \in V_2 \subset \bar{O}(\mathfrak{F})^{(1)}$, то $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \in \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$. Из замечания 6.4 получаем, что $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}_0}} \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$, а $V_2 \subset \bar{O}(\mathfrak{F})^{(2)}$, следовательно, $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$. Отсюда $\dim H(\mathfrak{F},\omega) = p^m - 2$. Лемма доказана.

Замечание 6.9. Если в условии леммы 6.7 положить $\omega_0 = \sum_{i=1}^{k} \omega_0^i$, где ω_0^i – неразложимые формы с матрицами α_0^i вида (0.8) (при $k > 1$), тогда в силу леммы 6.5 моном $e_{\mathfrak{F}_0}$ мы не получим во втором слагаемом формулы (1.20) ни для каких a и b, откуда $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}_0}} \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$ в этом случае, а это значит, что $\bar{\mathfrak{D}}_{e_{\mathfrak{F}}} \notin \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)}$, т.е. $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$ и

$$\dim H(\mathfrak{F},\omega) = p^m - 2.$$

Рассмотрим теперь общий случай. Из леммы 6.6 и замечания 6.4 получаем, что если $\det \alpha \neq 0$, то $\dim H(\mathfrak{F},\omega) = p^m - 1$. Если же $\det \alpha = 0$, то, применив лемму 6.7 и замечания 6.4, 6.9, имеем $\dim H(\mathfrak{F},\omega) = p^m - 2$. Пусть

$$B(\mathfrak{F}) = \begin{cases} O(\mathfrak{F})/K & \text{, если } \det \alpha \neq 0; \\ O'(\mathfrak{F})/K & \text{, если } \det \alpha = 0 \text{ и } \omega = \sum_{i=1}^{t} \omega_i \text{, где } \omega_i \\ & \text{– неразложимые формы с матрицами} \\ & \alpha_i \text{ вида (0.8);} \\ V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 & \text{, если } \det \alpha = 0 \text{ и } \omega = \sum_{i=1}^{t} \omega_i \text{, где} \\ & \text{среди неразложимых форм } \omega_i \text{ есть} \\ & \text{форма с матрицей вида (0.9).} \end{cases}$$

Здесь V_3 есть линейная оболочка элементов вида $\bar{x}_{i_1} \ldots \bar{x}_{i_k} \times \bar{x}_{\tilde{i}_1} \ldots \bar{x}_{\tilde{i}_k}$, которые не входят ни в одно из слагаемых многочленов из V_2. Тогда, приведенные выше рассуждения показывают, что в случае $v = 0$ справедлива

Теорема 6.10. *Как векторное пространство над K алгебра*

$H(\mathfrak{F},\omega)$ *натянута на дифференцирования* $\bar{\mathfrak{D}}_a$, $a \in B(\mathfrak{F})$, *и имеет следующую размерность*

$$\dim_K H(\mathfrak{F},\omega) = \begin{cases} p^m - 1, & \text{если } \det a \neq 0; \\ p^m - 2, & \text{если } \det a = 0. \end{cases}$$

Следствие 6.11. *Если* $v = 0$ *и* $\omega = \sum_{i=1}^{t} \omega_i$, *где* ω_i *- неразложимые формы, причем среди форм* ω_i *есть ровно одна форма с матрицей вида* (0.8), *тогда* $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} \neq \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$. *В остальных случаях* $\tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(1)} = \tilde{H}(\mathfrak{F},\omega)^{(2)}$.

Глава 2. СЭНДВИЧЕВА ПОДАЛГЕБРА В АЛГЕБРАХ ЛИ КАРТАНОВСКОГО ТИПА

В данной главе мы выясним строение сэндвичевой подалгебры в общей, специальной, гамильтоновой и контактной алгебрах Ли (теорема 1.1) и докажем гипотезу А.И.Кострикина, сформулированную в §5 главы 0, для этих алгебр (теорема 6.1)

§ 1. Технические леммы

Основным результатом настоящей главы является

Теорема 1.1. *Пусть* $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ *или* $K(\mathfrak{F})$. *Тогда справедливо* $\mathfrak{C}(L) = \mathfrak{C}(W_m) \cap L$. *Исключение составляет лишь алгебра* $L = K(\mathfrak{F})$ *при* $n + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. *В этом случае* $\mathfrak{C}(L) \subset \mathfrak{C}(W_m) \cap L$.

Доказывать эту теорему мы будем для каждого случая отдельно в §2-5. Но сначала докажем следующие леммы.

Лемма 1.2. *Пусть* $L = W(\mathfrak{F})$. *Если* $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$ *и* $v_y(c_i) > \frac{p+1}{2}$ *для всех* i, *тогда* $C \in \mathfrak{C}(L)$.

Доказательство. По условию $v_y(c_i) > \frac{p+1}{2}$, следовательно, согласно лемме 7.3 главы 0, коэффициенты c_i можно представить в виде $\sum_j l_{ij}^{\frac{p+3}{2}} g_{ij}$. Тогда $C = \sum_{i,j} C_{ij}$, где $C_{ij} = l_{ij}^{\frac{p+3}{2}} g_{ij} \partial_i$. Не трудно проверить, что многочлен $l_{ij}^{\frac{p+3}{2}} g_{ij}$ удовлетворяет соотношениям (0.12), а значит, в силу предложения 5.2 главы 0, $C_{ij} \in C(L)$, откуда $C \in \mathfrak{C}(L)$. Лемма доказана.

Из теорем 1.2, 5.1 и 6.10 главы 1, а также предложения 4.1 главы 0 получаем

Лемма 1.3. *Пусть* $\mathrm{L} = S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ *или* $K(\mathfrak{F})$. *Как векторное пространство над* $\mathcal{K}$ *алгебра* L *натянута на дифференцирования*

$$\bar{\mathfrak{D}}_a = \mathfrak{D}_a + a\,\mathfrak{D}_\omega, \qquad a \in \mathcal{B}(\mathfrak{F}). \tag{2.1}$$

Причем : 1) *если* $\mathrm{L} = S(\mathfrak{F},\omega)$, *то*

$$\mathfrak{D}_a = \mathfrak{D}_{ij}(a), \qquad \mathfrak{D}_\omega = \varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(\varphi),$$

т.е. $\bar{\mathfrak{D}}_a$ *зависит также от индексов* i *и* j, *а* $\mathcal{B}(\mathfrak{F}) = \mathcal{O}(\mathfrak{F})$;

2) *если* $\mathrm{L} = H(\mathfrak{F},\omega)$, *то*

$$\mathfrak{D}_a = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\omega}_{ji}\partial_j a \partial_i, \qquad \mathfrak{D}_\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\omega}_{ji}\partial_j v \partial_i,$$

а определение $\mathcal{B}(\mathfrak{F})$ *см. в §5-6 главы 1;*

3) *если* $\mathrm{L} = K(\mathfrak{F})$, *то*

$$\mathfrak{D}_a = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}} a\, \partial_i - \partial_i a\, \partial_{\tilde{i}}) + \sum_{i=1}^{n-1} x_i(\partial_n a\, \partial_i - \partial_i a\, \partial_n), \quad \mathfrak{D}_\omega = 2\,\partial_n,$$

а $\mathcal{B}(\mathfrak{F})$ *определено в §4 главы 0.*

Отметим некоторые свойства дифференцирований $\mathfrak{D}_a$:

1°. $\mathfrak{D}_{(a_1+a_2)} = \mathfrak{D}_{a_1} + \mathfrak{D}_{a_2}, \qquad \forall a_1,a_2 \in \mathcal{B}(\mathfrak{F})$;

2°. $\mathfrak{D}_{(a_1a_2)} = a_1\mathfrak{D}_{a_2} + a_2\mathfrak{D}_{a_1}, \qquad \forall a_1,a_2 \in \mathcal{B}(\mathfrak{F})$;

3°. $\mathfrak{D}_a(a) = 0, \qquad \forall a \in \mathcal{B}(\mathfrak{F})$.

Замечание 1.4. Легко проверить, что дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_a$, где $a = e_{\mathfrak{F}}$ или $a = e_{\underline{\mathfrak{F}}'} + \alpha\, e_{\mathfrak{F}}$ $(\alpha \in \mathcal{K})$, удовлетворяют соотношениям (0.12), т.е. $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathcal{C}(\mathrm{L})$, поэтому эти многочлены мы в дальнейшем рассматривать не будем.

Замечание 1.5. бозначим через $\mathfrak{M}$ пересечение максимального идеала алгебры $\mathcal{O}_{\mathrm{m}}$ с $\mathcal{B}(\mathfrak{F})$ (в случае $\mathrm{L} = W(\mathfrak{F})$ положим $\mathcal{B}(\mathfrak{F}) = \mathcal{O}(\mathfrak{F})$). Из (0.5) следует, что

$$\omega_{ij} \equiv a_{ij} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}^{p-1}),$$

где $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{K})$, причем $\mathcal{A}^{-1} = -\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathrm{T}}$, откуда

$$\bar{\omega}_{ji} \equiv a_{ij} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}^{p-1}).$$

Лемма 1.6. *Пусть* $\mathrm{L} = \mathrm{S}(\mathfrak{F},\omega)$, $\mathrm{H}(\mathfrak{F},\omega)$ *или* $\mathrm{K}(\mathfrak{F})$ *и* $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \in \mathrm{L}$, *тогда из условия* $C \in C(\mathrm{L})$ *следует, что* $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ *для всех* $i \in \{1,\dots,n\}$.

Доказательство. Пусть $U = \sum_{i=1}^{n} u_i \partial_i$ и $\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i = [[\,U, C\,], C\,]$, тогда

$$f_k = \sum_{l,j} \Big\{ c_l c_j (\partial_l \partial_j u_k) + c_j (\partial_l u_k)(\partial_j c_l) - 2\, c_j (\partial_j u_l)(\partial_l c_k) + \\ + u_l [(\partial_j c_k)(\partial_l c_j) - c_j (\partial_j \partial_l c_k)] \Big\}. \quad (2.2)$$

Переходя к "стертой" структуре, формула (2.2) примет вид

$$f_k \equiv \sum_{l,j} \Big\{ c_l c_j \partial_{l1} \partial_{j1} u_k + c_j \partial_{l1} u_k \partial_{j1} c_l - 2\, c_j \partial_{j1} u_l \partial_{l1} c_k + \\ + u_l [\partial_{j1} c_k \partial_{l1} c_j - c_j \partial_{j1} \partial_{l1} c_k] \Big\} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}^{\alpha}), \quad (2.3)$$

где $\alpha = p - 3 + 2\beta + \min\limits_{s}\{v_y(u_s)\}$, а $\beta = \min\limits_{s}\{v_y(c_s)\}$. Пусть $c_t = c_t^0 + c_t^1$, где c_t^0 – форма степени β в $\mathcal{O}_m$, а $v_y(c_t^1) > \beta$. Зафиксируем произвольное $i \in \{1,\dots,n\}$, для которого $c_i^0 \neq 0$, и рассмотрим дифференцирования из L :

$$\mathcal{A}_1 = \bar{\mathfrak{D}}_{\frac{x_i^3}{3}} = x_i^2 \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \partial_t + \mathcal{D}_1, \quad \text{где} \quad \alpha_t \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{D}_1 \in \mathrm{W}(\mathfrak{F})_{(2)};$$

$$\mathcal{A}_2 = \bar{\mathfrak{D}}_{x_i^2} = 2x_i \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \partial_t + \mathcal{D}_2, \quad \text{где} \quad \mathcal{D}_2 \in \mathrm{W}(\mathfrak{F})_{(1)};$$

$$\mathcal{A}_3 = \bar{\mathfrak{D}}_{x_i} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_t \partial_t + \mathcal{D}_3, \qquad \text{где} \quad \mathcal{D}_3 \in \mathrm{W}(\mathfrak{F})_{(0)}.$$

Здесь $\mathrm{W}(\mathfrak{F})_{(s)}$ – s-й член стандартной фильтрации в $\mathrm{W}(\mathfrak{F})$. Положив $U = \mathcal{A}_3$ в (2.3), получим

$$f_k \equiv \sum_{l,j} \alpha_l [(\partial_{j1} c_k^0)(\partial_{l1} c_j^0) - c_j^0 (\partial_{j1} \partial_{l1} c_k^0)] \pmod{\mathfrak{M}^{2\beta-1}}.$$

Условие $(\mathrm{ad}\ C)^2 = 0$ равносильно условию $f_k = 0$ для всех k, поэтому

$$\sum_{l,j} \alpha_l [(\partial_{j1} c_k^0)(\partial_{l1} c_j^0) - c_j^0 (\partial_{j1} \partial_{l1} c_k^0)] = 0, \qquad (2.4)$$

$\forall k \in \{1,\dots,n\}$. Используя формулы (2.1) и (0.20) получаем, что $D_2 \in W_{m,(1)}$, поэтому, если $U = \mathcal{A}_2$, из (2.3) и (2.4) получим

$$f_k \equiv 2 \sum_j [\alpha_k c_j^0 (\partial_{j1} c_i^0) - 2\alpha_j c_i^0 (\partial_{j1} c_k^0)] \pmod{\mathfrak{M}^{2\beta}}.$$

А так как $f_k = 0$, то

$$\sum_j [\alpha_k c_j^0 (\partial_{j1} c_i^0) - 2\alpha_j c_i^0 (\partial_{j1} c_k^0)] = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \qquad (2.5)$$

Также как и в предыдущем случае, $D_1 \in W_{m,(2)}$, следовательно, полагая $U = \mathcal{A}_1$, получаем

$$f_k \equiv 2\, \alpha_k (c_i^0)^2 + 2\, y_{i1} \sum_j [\alpha_k c_j^0 (\partial_{j1} c_i^0) - 2\alpha_j c_i^0 (\partial_{j1} c_k^0)] +$$

$$+ y_{i1}^2 \sum_{l,j} \alpha_l [(\partial_{j1} c_k^0)(\partial_{l1} c_j^0) - c_j^0 (\partial_{j1} \partial_{l1} c_k^0)] \pmod{\mathfrak{M}^{2\beta+1}}.$$

Отсюда, а также из (2.4) и (2.5) имеем

$$f_k \equiv 2\, \alpha_k (c_i^0)^2 \pmod{\mathfrak{M}^{2\beta+1}}.$$

Из равенства $f_k = 0$ получаем, что $2\, \alpha_k (c_i^0)^2 = 0$ для всех k. Но $\alpha_k \neq 0$ для некоторого k, поэтому $(c_i^0)^2 = 0$, что по лемме 7.2 главы 0 означает $\beta \geqslant \frac{p+1}{2}$. Откуда $v_y(c_i) = \beta \geqslant \frac{p+1}{2}$. В силу произвольности выбора i, лемма доказана.

Замечание 1.7. В случае $L = K(\mathfrak{F})$ можно получить более сильное утверждение (см. [35]): если $C \in C(L)$, то $c_i c_j = 0$

для всех i,j.

Лемма 1.8. *Пусть* $L = S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ *или* $K(\mathfrak{F})$ *и* $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, *тогда* $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(L)$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, тогда в силу леммы 7.3 главы 0 $a = \sum\limits_s l_s^{\frac{p+3}{2}} g_s$, где l_s – линейные формы в $\mathcal{O}_m$. Из 1^0-го свойства дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_a$ получаем, что $\bar{\mathfrak{D}}_a = \sum\limits_s \bar{\mathfrak{D}}_{l_s^{\frac{p+3}{2}} g_s}$. Тогда имеем

$$\bar{\mathfrak{D}}_{l_s^{\frac{p+3}{2}} g_s} = \frac{p+3}{2}\, l_s^{\frac{p+1}{2}} g_s \mathfrak{D}_{l_s} + l_s^{\frac{p+3}{2}} (\mathfrak{D}_{g_s} + g_s \mathfrak{D}_\omega).$$

Легко убедиться, что это дифференцирование удовлетворяет соотношениям (0.12) предложения 5.2 главы 0, поэтому

$$\bar{\mathfrak{D}}_{l_s^{\frac{p+3}{2}} g_s} \in C(W(\mathfrak{F})) \cap L \subset C(L),$$

откуда $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(L)$.

Лемма 1.9. *Пусть* $L = S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ *или* $K(\mathfrak{F})$ *и* $C = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \partial_i \in L$. *Коэффициенты дифференцирования* C *удовлетворяют условию* $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ *для всех* i *тогда и только тогда, когда* C *можно представить в виде суммы дифференцирований* $\bar{\mathfrak{D}}_a$, *где* $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathfrak{M}}$.

Множество $\bar{\mathfrak{M}}$ в каждом случае определяется по-разному, а именно :

1) если $L = S(\mathfrak{F},\omega)$, то $\bar{\mathfrak{M}} = \bar{\mathcal{R}}_{ij}$ (здесь индексы i и j теже, что и у дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_a = \mathfrak{D}_{ij}(a)$), где

$$\bar{\mathcal{R}}_{ij} = \begin{cases} \mathcal{R}_{ij}, & \text{если } \omega = \omega_2 \text{ при } i,j \neq t; \text{ или если } \omega = \omega_0,\omega_1; \\ \mathcal{R}_{ij}^{\frac{p+1}{2}}, & \text{если } \omega = \omega_2 \text{ при } i \text{ или } j = t; \end{cases}$$

а $\mathcal{R}_{ij} = \langle x^{(\alpha)} \mid (\alpha) \neq (0);\ p|\alpha_i$ и $p|\alpha_j \rangle$ или иначе $\mathcal{R}_{ij}$ - максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{m-2}$, где

$$\mathcal{O}_{m-2} = \mathcal{K}[y_{11},\dots,\hat{y}_{i1},\dots,\hat{y}_{j1},\dots,y_{nm_n}]/(y_{11},\dots,y_{nm_n})^p;$$

2) если $L = H(\mathfrak{F},\omega)$, то

$$\bar{\mathfrak{M}} = \begin{cases} \mathfrak{N}, & \text{при } v = 0; \\ \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}}, & \text{при } v \neq 0; \end{cases}$$

где $\mathfrak{N} = \langle x^{(\alpha)} \mid (\alpha) \neq (0)$ и $p|\alpha_i\ \ \forall i=\overline{1,n} \rangle \cap \mathcal{B}(\mathfrak{F})$ или иначе $\mathfrak{N}$ - максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{m-n} \cap \mathcal{B}(\mathfrak{F})$ ($\mathcal{O}_{m-n}$- подкольцо в $\mathcal{O}_m$, не содержащее переменных $y_{11},y_{21},\dots,y_{n1}$);

3) если $L = K(\mathfrak{F})$, то $\bar{\mathfrak{M}} = \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}}$, где $\mathfrak{N} = \langle x^{(\alpha)} \mid (\alpha) \neq (0)$ и $p|\alpha_i\ \ \forall i=\overline{1,n-1} \rangle \cap \mathcal{B}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно, необходимо только рассмотреть $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathfrak{M}}$ и внимательно проследить за степенями коэффициентов дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_a$, воспользовавшись при этом формулами (2.1) и (0.20).

Если $L = H(\mathfrak{F},\omega)$ или $K(\mathfrak{F})$, то любое дифференцирование $C \in L$ имеет вид $C = \bar{\mathfrak{D}}_a$, для некоторого a, поэтому в справедливости обратного утверждения легко убедиться, рассуждая по минимальности порядка многочлена a и используя при этом формулы (2.1) и (0.20) (случай $L = K(\mathfrak{F})$ см. также в [35]). Наибольшую сложность представляет доказательство обратного утверждения для $L = S(\mathfrak{F},\omega)$, которое мы сейчас приведем.

Пусть $C = \sum_{i=1}^{n} c_i\partial_i \in L = S(\mathfrak{F},\omega)$ и $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ для всех i Рассмотрим три случая.

1. $\omega = \omega_0$. В этом случае $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F},\omega_0)$ - градуированная алгебра Ли. Доказательство обратного утверждения для $S(\mathfrak{F})$ следует из предложения 2 работы [33].

2. $\omega = \omega_1$. В §2 главы 1 показано, что $S(\mathfrak{F},\omega_1) = V \oplus \mathfrak{L}_0$ По условию $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ для всех i, следовательно $C \in \mathfrak{L}_0$, т.е. $\operatorname{div} C = 0$. Из предложения 2 работы [33] получаем, что C можно представить в виде суммы дифференцирований $\mathfrak{D}_{ij}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathcal{R}_{ij}$. Заметим только, что в этом случае для $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathcal{R}_{ij}$: $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) = \mathfrak{D}_{ij}(a)$.

3. $\omega = \omega_3$. По условию $\omega = \exp x_t\, \omega_0$, т.е.

$$\operatorname{div} C + c_t = 0. \tag{2.6}$$

— необходимое и достаточное условие принадлежности элемента $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i$ к $S(\mathfrak{F},\omega)$ (см. §2 главы 1). Для доказательства обратного утверждения леммы, аналогично как и в §2 главы 1, будем использовать длину $\lambda(C)$ дифференцирования $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Доказывать будем индукцией по $\lambda(C)$.

Пусть $\lambda(C) = 1$, тогда $C = c_i\partial_i$, причем $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$. Из (2.6) получаем, что

$$\partial_i c_i = 0, \qquad \text{если } i \neq t,$$

или

$$\partial_t c_t + c_t = 0, \qquad \text{если } i = t.$$

Если $i = t$, то $c_t = 0$ (т.к. $c_t \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$), что противоречит условию $v_y(c_t) \geqslant \frac{p+1}{2}$, поэтому $i \neq t$. Но тогда $c_i \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}^{(i)})$ (обозначение $\mathfrak{F}^{(i)}$ см. в §2 главы 1). Рассмотрим $j \neq i, t$ (это возможно, поскольку $n > 2$) и разложим многочлен c_i по степеням x_j

$$c_i = \sum_{k=0}^{p^{m_j}-1} a_k x_j^{(k)}.$$

Заметим, что $v_y(a_k x_j^{(k)}) \geqslant \frac{p+1}{2}$ и $a_k \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}^{(i,j)})$ для всех k. Пусть

$$g_1 = \sum_{l=1}^{p^{m_j-1}} a_{lp-1} x_j^{(lp-1)},$$

$$g_2 = c_t - g_1.$$

Легко видеть, что $g_1 = g_0\, x_j^{(p-1)}$. В силу (1.2) дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_{lk}$ имеют вид (1.3). Обозначим через $\bar{g}_2$ многочлен $\int g_2\, dx_j$ из $\mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$. Тогда

$$g_2\partial_t = \mathfrak{D}_{jt}(\bar{g}_2) = \bar{\mathfrak{D}}_{jt}(\bar{g}_2). \tag{2.7}$$

Проверим, что $v_y(\bar{g}_2) > \frac{p+1}{2}$. В самом деле, рассмотрим однородное слагаемое $a_\alpha x_j^{(\alpha)}$ многочлена g_2 и пусть $\alpha = \sum_{l\geqslant 0} \alpha_l p^l$ – p-адическое разложение натурального числа α, тогда

$$v_y(x_j^{(\alpha)}) = \sum_{l\geqslant 0} \alpha_l.$$

С другой стороны, в многочлене $\bar{g}_2$ соответствующее слагаемое имеет вид $a_\alpha x_j^{(\alpha+1)}$, а т.к. в g_2 степень $\alpha_0 < p-1$, то

$$v_y(x_j^{(\alpha+1)}) = v_y(x_j^{(\alpha)}) + 1.$$

Отсюда $v_y(a_\alpha x_j^{(\alpha+1)}) \geqslant v_y(a_\alpha x_j^{(\alpha)}) + 1$. В силу произвольности α, получаем

$$v_y(\bar{g}_2) \geqslant v_y(g_2) + 1 > \frac{p+1}{2}.$$

Поскольку $g_1 = g_0\, x_j^{(p-1)}$, то $\partial_t^k\, g_1 = x_j^{(p-1)} \partial_t^k\, g_0$, т.е. $v_y(\partial_t^k\, g_1) \geqslant p-1$, и следовательно $\partial_t^k\, g_1 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$ для всех k. Тогда

$$g_1\partial_t = \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k\, \bar{\mathfrak{D}}_{tt}(\partial_t^k\, g_1). \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) получаем, что дифференцирование $C = c_t\partial_t = g_1\partial_t + g_2\partial_t$ можно представить в виде суммы элементов $\bar{\mathfrak{D}}_{lk}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$. Таким образом, мы доказали наше утверждение для всех дифференцирований C длины 1.

Пусть теперь утверждение леммы справедливо для всех дифференцирований C длины $\lambda(C) < k$ и пусть $\lambda(C) = k$. Не уменьшая общности, будем полагать, что $C = (c_1,\dots,c_k,0,\dots,0)$ и $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ $\forall i=\overline{1,k}$.

а) Пусть $t \leqslant k$. Так как $k \geqslant 2$, то можно положить, что $t \neq k$, т.е. $t < k$. Разложим многочлены c_i по степеням $x = x_k$

$$c_i = \sum_{s=0}^{p^{m_k}-1} a_{is}x^{(s)}, \tag{2.9}$$

где $a_{is} \in O(\mathfrak{F}^{(k)})$. По условию $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$, следовательно $v_y(a_{ij}x^{(j)}) \geqslant \frac{p+1}{2}$. Используя (2.6) и (2.9), получаем

$$a_{ks} = -\sum_{i=1}^{k-1} \partial_i a_{i,s-1} - a_{t,s-1}, \quad 1 \leqslant s \leqslant p^{m_k} - 1, \tag{2.10}$$

Если $p \nmid s$, тогда $v_y(a_{i,s-1}x^{(s)}) \geqslant v_y(a_{i,s-1}x^{(s-1)}) + 1$ (это можно показать точно также, как и в случае $\lambda(C) = 1$), т.е. $a_{i,s-1}x^{(s)} \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$. Вектор $\bar{\mathfrak{D}}_{ki}(a_{i,s-1}x^{(s)})$ имеет своей k-й координатой многочлен

$$g_{ki} = -(\partial_i a_{i,s-1})x^{(s)},$$

для всех $i = \overline{1,k-1}$ и $i \neq t$, причем координаты $g_{ji} = 0$ $\forall j > k$. Аналогично, для $i = t$, вектор $\bar{\mathfrak{D}}_{kt}(a_{t,s-1}x^{(s)})$ имеет k-ю координату

$$g_{kt} = -(\partial_t a_{t,s-1} + a_{t,s-1})x^{(s)}.$$

Пусть $p|s$. Обозначим через $\bar{a}_{i,s-1}$ ту часть многочлена $a_{i,s-1}$, для которой $v_y(\partial_i\bar{a}_{i,s-1}x^{(s)}) \geqslant \frac{p+1}{2}$, тогда $\bar{a}_{i,s-1}x^{(s)} \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + R_{ki}$. По условию $v_y(a_{ks}x^{(s)}) \geqslant \frac{p+1}{2}$, следовательно в формуле (2.10) ненулевой вклад при $l \neq t$ могут давать только $\partial_l \bar{a}_{l,s-1}$. Тогда вектор $\bar{\mathfrak{D}}_{kl}(\bar{a}_{l,s-1}x^{(s)})$, где $\bar{a}_{l,s-1}x^{(s)} \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathcal{R}_{kl}$, имеет своей k-й координатой многочлен

$$\bar{g}_{kl} = -(\partial_l \bar{a}_{l,s-1})x^{(s)}, \qquad 1 \leqslant l \ (\neq t) \leqslant k-1,$$

причем $\bar{g}_{jl} = 0 \ \forall j > k$. Рассмотрим $l = t$ и обозначим через g_1 часть многочлена $a_{t,s-1}x^{(s)}$, которая лежит в $\mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathcal{R}_{kt}^{\frac{p+1}{2}}$; через g_2 часть $a_{t,s-1}x^{(s)}$, лежащую в $\mathcal{R}_{kt} \setminus \mathcal{R}_{kt}^{\frac{p+1}{2}}$; через g_3 часть $a_{t,s-1}x^{(s)}$ такую, что $g_3 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \setminus \left[\mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathcal{R}_{kt}^{\frac{p+1}{2}}\right]$; через g_4 многочлен $a_{t,s-1}x^{(s)} - (g_1 + g_2 + g_3)$. Легко проверить, что ненулевые вклады в (2.10) могут дать лишь многочлены g_1, g_2, g_3. Дифференцирование $\mathcal{A}_s = \bar{\mathfrak{D}}_{kt}(g_1)$ имеет своей k-й координатой многочлен

$$\bar{g}_{kt} = -(\partial_t g_1 + g_1).$$

Поскольку $g_2 \in \mathcal{R}_{kt} \setminus \mathcal{R}_{kt}^{\frac{p+1}{2}}$, т.е. $v_y(g_2) < \frac{p+1}{2}$, то вклад в (2.10) может давать лишь многочлен $\partial_t g_2$. Покажем, что существует дифференцирование

$$B_s = (b_1, \ldots, b_k, 0, \ldots, 0),$$

такое, что $b_k = \partial_t g_2$ и B_s есть сумма дифференцирований $\bar{\mathfrak{D}}_{lj}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathcal{R}}_{lj}$. Не теряя общности, можно полагать, что g_2 есть моном $x_1^{(\alpha_1)} \ldots x_n^{(\alpha_n)} \in \mathcal{R}_{kt} \setminus \mathcal{R}_{kt}^{\frac{p+1}{2}}$, т.е. $p | \alpha_t$ и $p | \alpha_k = s$. Поэтому $\partial_t g_2 = g_0 \, x_t^{(p-1)} \in \mathfrak{M}^{p-1}$. Так как $v_y(g_2) < \frac{p+1}{2}$, то моном g_2 мы можем интегрировать по любой переменной. В частности, так как $n > 2$, то существует $j \neq t, k$ такое, что

$$g = x_1^{(\alpha_1)} \dots x_t^{(\alpha_t - 1)} \dots x_j^{(\alpha_j + 1)} \dots x_n^{(\alpha_n)} \in \mathfrak{M}^{p-1}$$

и $\partial_j g = \partial_t g_2$. Откуда

$$\bar{\mathfrak{D}}_{jk}(g) = \mathfrak{D}_{jk}(g) = \partial_t g_2 \partial_k - \partial_k g \partial_j .$$

Тогда дифференцирование

$$B_s = \bar{\mathfrak{D}}_{jk}(g) + \sum_{l \geqslant 0} (-1)^l \, \bar{\mathfrak{D}}_{tj}(\partial_t^l \partial_k g)$$

будет иметь всего две координаты отличные от нуля - t-ю и k-ю, причем k-я координата $b_k = \partial_t g_2$ и $\partial_t^l \partial_k g \in \mathfrak{M}^{p-1}$ $\forall l$.

Поскольку $g_3 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \setminus \left[\mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + R_{kt}^{\frac{p+1}{2}}\right]$, то вклад в (2.10) будет давать сам многочлен g_3. Покажем, что существует такое дифференцирование

$$\mathcal{F}_s = (f_1, \dots, f_k, 0, \dots, 0),$$

что $f_k = g_3$ и $\mathcal{F}_s$ есть сумма дифференцирований $\bar{\mathfrak{D}}_{lj}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{R}_{lj}$.

Положим $g_3 = x_1^{(\alpha_1)} \dots x_n^{(\alpha_n)}$ (в общем случае $g_3 = \sum_{(\alpha)} \gamma_{(\alpha)} x^{(\alpha)}$, $\gamma_{(\alpha)} \in K$, т.е. $\mathcal{F}_s = \sum_{(\alpha)} \mathcal{F}_{(\alpha)}$), причем $p | \alpha_k = s$ и $v_y(g_3) = \frac{p+1}{2}$, следовательно моном g_3 можно интегрировать по любой переменной. Рассмотрим $j \neq t, k$ и

$$\tau = x_1^{(\alpha_1)} \dots x_j^{(\alpha_j + 1)} \dots x_n^{(\alpha_n)} \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}},$$

тогда $\partial_j \tau = g_3$, откуда

$$\bar{\mathfrak{D}}_{jk}(\tau) = g_3 \partial_k - \partial_k \tau \partial_j ,$$

где $\partial_k \tau = \tau_0 x_k^{(p-1)} \in \mathfrak{M}^{p-1}$. Тогда дифференцирование

$$\mathcal{F}_s = \bar{\mathfrak{D}}_{jk}(\tau) + \sum_{l \geqslant 0} (-1)^l \, \bar{\mathfrak{D}}_{tj}(x_k^{(p-1)} \partial_t^l \tau_0)$$

будет искомым ($f_k = g_3$).

Таким образом, из формулы (2.10) получаем, что если

$$U = C - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{s=1 \\ p\nmid s}}^{p^{m_k}-1} \bar{\mathfrak{D}}_{ki}(a_{i,s-1}x^{(s)}) -$$

$$- \sum_{\substack{s=1 \\ p|s}}^{p^{m_k}-1} \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq t}}^{k-1} \bar{\mathfrak{D}}_{ki}(\bar{a}_{i,s-1}x^{(s)}) + \mathcal{A}_s + \mathcal{B}_s + \mathcal{F}_s \right\}, \qquad (2.11)$$

то $U = (u_1,\ldots,u_k,0,\ldots,0)$, где $v_y(u_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ и $u_k = a_{k0} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}^{(k)})$, поэтому $\partial_k u_k = 0$. Пусть $U = U' + U''$, где $U' = (u_1,\ldots, u_{k-1},0,\ldots,0)$, а $U'' = u_k\partial_k$. Поскольку $k \neq t$ и $\operatorname{div} U'' = 0$, то $U'' \in S(\mathfrak{F},\omega)$ и $\lambda(U'') = 1$, т.е. U'' можно представить в виде суммы дифференцирований $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathcal{R}}_{ij}$. Но и $U \in S(\mathfrak{F},\omega)$, следовательно $U' = U - U'' \in S(\mathfrak{F};\omega)$, причем $\lambda(U') < k$, т.е. по предположению индукции U' тоже можно представить в виде суммы $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$. Из (2.11) получаем, что C также представимо в виде суммы дифференцирований $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$, $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathcal{R}}_{ij}$.

b) Пусть $t > k$. Тогда условия (2.6) и формула (2.10) будут иметь вид

$$\operatorname{div} C = 0$$

и

$$a_{ks} = -\sum_{i=1}^{k-1} \partial_i a_{i,s-1}.$$

Далее, проводя такиеже как и в случае а) рассуждения, получим

$$U = C - \sum_{i=1}^{k-1} \left\{ \sum_{\substack{s=1 \\ p\nmid s}}^{p^{m_k}-1} \bar{\mathfrak{D}}_{ki}(a_{i,s-1}x^{(s)}) + \sum_{\substack{s=1 \\ p|s}}^{p^{m_k}-1} \bar{\mathfrak{D}}_{ki}(\bar{a}_{i,s-1}x^{(s)}) \right\}$$

и так далее. Лемма доказана.

Замечание 1.10. Случай $\omega = \omega_0, \omega_1$ можно доказывать аналогично случаю $\omega = \omega_2$ индукцией по $\lambda(C)$. При этом придется несколько изменить доказательство для $\lambda(C) = 1$, а затем воспользоваться b).

§ 2. Подалгебра $\mathfrak{C}$ в алгебре $W(\mathfrak{F})$

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1 для $L = W(\mathfrak{F})$. Покажем сначала включение $\mathfrak{C}(L) \subseteq \mathfrak{C}(W_m) \cap L$.

Рассмотрим дифференцирование $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \in C(L)$, тогда c_i, по предложению 5.2 главы 0, удовлетворяют соотношениям (0.12). После замены переменных (0.19)-(0.20) дифференцирование C будет иметь вид

$$C = \sum_{i=1}^{n} c_i \left[\partial_{i1} - y_{i1}^{p-1}\partial_{i2} + \ldots + (-1)^{m_i+1} y_{i1}^{p-1} \ldots y_{i,m_i-1}^{p-1} \partial_{im_i}\right], \quad (2.12)$$

где $c_i = c_i(y_{11}, \ldots, y_{nm_n}) \in O_m$.

Замечание 2.1. В дальнейшем через div_x будем обозначать дивергенцию в алгебре L, а через div_y – дивергенцию в алгебре W_m. Необходимо отметить, что для всех $\mathfrak{D} \in L$ выполняется равенство $\operatorname{div}_x \mathfrak{D} = \operatorname{div}_y \mathfrak{D}$.

По условию, c_i удовлетворяют соотношениям (0.12), поэтому в силу леммы 7.2 главы 0 $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$. Представим многочлены c_i в виде суммы $c_i^0 + c_i^1$, где c_i^0 – форма степени $\frac{p+1}{2}$ в O_m, а $v_y(c_i^1) > \frac{p+1}{2}$, тогда $C = C^0 + C^1$, где

$$C^0 = \sum_{i=1}^{n} c_i^0 \partial_{i1},$$

$$C^1 = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i^1 \partial_{i1} + (c_i^0 + c_i^1) \sum_{j=2}^{m_i} (-1)^{j+1} y_{i1}^{p-1} \ldots y_{i,j-1}^{p-1} \partial_{ij}\right].$$

Поскольку $v_y(c_i^1) > \frac{p+1}{2}$, то $C^1 \in W_{m,\left[\frac{p+1}{2}\right]}$, что в силу предложения 5.1 главы 0 означает $C^1 \in \mathfrak{C}(W_m)$.

Пусть $C^0 \neq 0$ (иначе $C = C^1 \in \mathfrak{C}(W_m)$). Покажем, что $C^0 \in \mathfrak{C}(W_m)$. Так как $\deg c_i^0 = \frac{p+1}{2}$, то $C^0 \in W_{m,\left[\frac{p+1}{2}\right]}$, поэтому, согласно предложению 5.1 главы 0, достаточно показать, что $\operatorname{div}_y C^0 = 0$.

Заметим, что c_i^0 – форма младшей степени многочлена c_i, поэтому из условий $c_i c_j = 0$ следует, что $c_i^0 c_j^0 = 0$, в частности, $(c_i^0)^2 = 0$. Воспользуемся леммой 7.1 главы 0 и получим, что $c_i^0 = l_i^{\frac{p+1}{2}}$, где l_i – линейная форма. Условия же $c_i^0 c_j^0 = 0$ при $i \neq j$ означают, что все формы l_i пропорциональны, т.е.

$$C^0 = l^{\frac{p+1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \partial_{i1}, \qquad \alpha_i \in K. \tag{2.13}$$

Из третьего условия соотношений (0.12) имеем

$$0 = c_k\, \partial_i \operatorname{div} C \equiv c_k^0\, \partial_{i1} \operatorname{div}_y C^0 \pmod{\mathfrak{M}^p}.$$

Отсюда получаем

$$c_k^0\, \partial_{i1} \operatorname{div}_y C^0 = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.14}$$

Так как $C^0 \neq 0$, то $c_k^0 \neq 0$ для некоторого k. Из (2.13) и (2.14) имеем

$$\frac{p+1}{2} \alpha_k l^{\frac{p+1}{2}} \partial_{i1}\left(l^{\frac{p-1}{2}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{j1} l\right) = \frac{p^2-1}{4} \alpha_k l^{p-1} \partial_{i1} l \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{j1} l = 0,$$

$\forall i \in \{1,\ldots,n\}$. Но $\frac{p^2-1}{4} \alpha_k l^{p-1} \neq 0$, поэтому либо $\partial_{i1} l = 0$ $\forall i$, либо $\sum_j \alpha_j \partial_{j1} l = 0$. Оба эти условия приводят к тому, что $\operatorname{div}_y C^0 = \frac{p+1}{2} l^{\frac{p-1}{2}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \partial_{j1} l = 0$, а значит $C^0 \in \mathfrak{C}(W_m)$.

Итак, мы показали, что $C \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$. Докажем теперь обратное включение.

Пусть $C \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$, тогда C имеет вид (2.12) и $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ $\forall i$. Поэтому c_i можно представить в виде суммы $c_i^0 + c_i^1$, где c_i^0 – форма степени $\frac{p+1}{2}$, а $v_y(c_i^1) > \frac{p+1}{2}$, причем по условию $\operatorname{div}_y\left[\sum_{i=1}^{n} c_i^0\partial_{i1}\right] = 0$. Тогда $C = C^0 + C^1$, где $C^0 = \sum_i c_i^0\partial_i$, а $C^1 = \sum_i c_i^1\partial_i$. Поскольку $v_y(c_i^1) > \frac{p+1}{2}$, то в силу леммы 1.2 $C^1 \in \mathfrak{C}(L)$, т.е. нам остается показать, что $C^0 \in \mathfrak{C}(L)$.

Пусть $\bar{C} = \sum_{i=1}^{n} c_i^0\partial_{i1}$ и $S_n = \langle \partial_{i1}(f)\partial_{j1} - \partial_{j1}(f)\partial_{i1} \mid f \in O_n \rangle$, где $O_n = K[y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}]/(y_{11}^p, y_{21}^p, \ldots, y_{n1}^p)$, тогда $\bar{C} \in O_{m-n} \otimes S_n$, т.е. $\bar{C}$ есть сумма дифференцирований $gl_\xi^k\,\partial_\xi$, где $g \in O_{m-n}$, l_ξ – линейная форма и $\partial_\xi l_\xi = 0$ (под ξ понимается набор переменных $y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}$). Дифференцирование $gl_\xi^k\,\partial_\xi$ фактически имеет вид $gz_1^k\,\partial_{z_2}$, где g не зависит от z_1 и z_2. А так как $g\,z_1^k$ можно представить в виде $\sum_j l_j^{\frac{p+1}{2}}$, где линейные формы l_j не зависят от z_2, поэтому $\bar{C}$ есть сумма дифференцирований вида $l^{\frac{p+1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\partial_{i1}$ с нулевой дивергенцией. Таким образом, достаточно доказать наше утверждение для

$$C^0 = l^{\frac{p+1}{2}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\partial_i. \tag{2.15}$$

Пусть $n = 1$. Покажем, что $C^0 = l^{\frac{p+1}{2}}\partial_1 \in C(L)$. Легко проверить, что для C^0 выполнены первые два условия соотношений (0.12). Проверим выполнение третьего условия :

$$c_1\partial_1 \operatorname{div}_x C^0 = l^{\frac{p+1}{2}}\partial_1(\partial_1 l^{\frac{p+1}{2}}) = \frac{p^2-1}{4}\, l^{p-1}\Big[(\partial_{11} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m_1} (-1)^{j+1}(y_{11}\cdots y_{1,j-1})^{p-1}\partial_{1j})l\Big]^2 =$$

$$= \frac{p^2-1}{4}\, l^{p-1}(y_{11}^{p-1})^2\Big[\sum_{j=2}^{m_1}(-1)^{j+1}(y_{12}\cdots y_{1,j-1})^{p-1}\partial_{1j}l\Big]^2 = 0,$$

т.к. по условию $\operatorname{div}_y\Big[l^{\frac{p+1}{2}}\partial_{11}\Big] = \frac{p+1}{2}\, l^{\frac{p-1}{2}}\partial_{11}l = 0$, откуда $\partial_{11}l = 0$.

Далее будем полагать $n \geqslant 2$. Покажем, что C^0 можно представить в виде суммы дифференцирований из $\mathfrak{C}(L)$. В формуле (2.15) l – линейная форма, следовательно l имеет вид

$$l = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{m_i-1}\sigma_i^\nu\, x_i^{(p^\nu)},$$

где $\sigma_i^\nu \in K$. Обозначим через

$$\overline{\partial_i l} = \sum_{\nu=1}^{m_i-1}\sigma_i^\nu\, x_i^{(p^\nu-1)},$$

тогда

$$\partial_i l = \sigma_i^0 + \overline{\partial_i l} \qquad \text{и} \qquad (\overline{\partial_i l})^2 = 0. \qquad (2.16)$$

По условию

$$\operatorname{div}_y\Big[l^{\frac{p+1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\partial_{i1}\Big] = \frac{p+1}{2}\, l^{\frac{p-1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_i^0 = 0, \qquad (2.17)$$

отсюда получаем

$$\operatorname{div}_x C^0 = \frac{p+1}{2}\, l^{\frac{p-1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\partial_i l}. \qquad (2.18)$$

Рассмотрим три случая

1) Пусть форма l содержит переменные x_t и x_j, т.е. $\sigma_t^0 \neq 0$ и $\sigma_j^0 \neq 0$, $t \neq j$. Рассмотрим дифференцирования

$$\tilde{C}^0 = \frac{l^{\frac{p+1}{2}}}{\sigma_t^0}\sum_{i \neq t}\alpha_i\overline{\partial_i l}\,\partial_t + \frac{l^{\frac{p+1}{2}}}{\sigma_j^0}\alpha_t\overline{\partial_t l}\,\partial_j, \qquad (2.19)$$

$$\bar{C}^0 = \frac{l^{\frac{p+1}{2}}}{(\sigma_t^0)^2} \sum_{i \neq t} \alpha_i \overline{\partial_i l}\ \overline{\partial_t l}\ \partial_t + \frac{l^{\frac{p+1}{2}}}{(\sigma_j^0)^2} \alpha_t \overline{\partial_t l}\ \overline{\partial_j l}\ \partial_j . \qquad (2.20)$$

Учитывая (2.16), получаем

$$\operatorname{div}_x \tilde{C}^0 = \frac{p+1}{2} l^{\frac{p-1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\partial_i l} + \overline{\partial_t l} \left[\frac{1}{\sigma_t^0} \sum_{i \neq t} \alpha_i \overline{\partial_i l} + \frac{1}{\sigma_j^0} \alpha_t \overline{\partial_j l} \right] \right\}, \qquad (2.21)$$

$$\operatorname{div}_x \bar{C}^0 = \frac{p+1}{2} l^{\frac{p-1}{2}}\ \overline{\partial_t l} \left[\frac{1}{\sigma_t^0} \sum_{i \neq t} \alpha_i \overline{\partial_i l} + \frac{1}{\sigma_j^0} \alpha_t \overline{\partial_j l} \right] + l^{\frac{p+1}{2}} g, \qquad (2.22)$$

где $g \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$.

Положим $\hat{C}^0 = C^0 - \tilde{C}^0 + \bar{C}^0$, тогда из (2.15), (2.19) и (2.20) получаем, что

$$\hat{C}^0 = l^{\frac{p+1}{2}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_i + l^{\frac{p+1}{2}} f_t \partial_t + l^{\frac{p+1}{2}} f_j \partial_j , \qquad (2.23)$$

где $f_t, f_j \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$ и $f_t(0) = f_j(0) = 0$. Из (2.18), (2.21) и (2.22) имеем

$$\operatorname{div}_x \hat{C}^0 = l^{\frac{p+1}{2}} g. \qquad (2.24)$$

Равенства (2.23) и (2.24) показывают, что дифференцирование $\hat{C}^0$ удовлетворяет соотношениям (0.12) предложения 5.2 главы 0, т.е. $\hat{C}^0 \in C(L)$. А так как дифференцирования $\tilde{C}^0$ и $\bar{C}^0$ удовлетворяют условиям леммы 1.2, то $\tilde{C}^0$ и $\bar{C}^0$ лежат в $\mathfrak{C}(L)$. Таким образом, мы получаем, что $C^0 = (\hat{C}^0 + \tilde{C}^0 - \bar{C}^0) \in \mathfrak{C}(L)$.

2) Пусть в форме l $\sigma_t^0 \neq 0$ и $\sigma_i^0 = 0$ $\forall i \neq t$. Тогда из формулы (2.17) имеем $\alpha_t = 0$. Далее доказательство аналогично случаю 1) (только в формулах (2.19), (2.20), (2.21) и (2.22) необходимо учесть, что $\alpha_t = 0$).

3) Пусть в форме l $\sigma_i^0 = 0$ $\forall i$. Тогда достаточно рассмот-

реть случай $C^0 = l^{\frac{p+1}{2}} \partial_k$. Рассмотрим $t \neq k$, тогда

$$l^{\frac{p+1}{2}} = (l + y_{t1})^{\frac{p+1}{2}} - \sum_{s=1}^{\frac{p+1}{2}} \binom{\frac{p+1}{2}}{s} y_{t1}^{s} l^{\frac{p+1}{2}-s}.$$

В силу леммы 7.4 главы 0 получаем, что $l^{\frac{p+1}{2}} = \sum_j l_j^{\frac{p+1}{2}}$, где l_j - линейные формы, у которых $\sigma_s^0 = 0$ (при $s \neq t$), а $\sigma_t^0 \neq 0$. А так как $t \neq k$, то дифференцирование $l_j^{\frac{p+1}{2}} \partial_k$ (для фиксированного j) удовлетворяет условию

$$\operatorname{div}_y (l_j^{\frac{p+1}{2}} \partial_{k1}) = 0.$$

Поэтому, согласно случаю 2),дифференцирование $l_j^{\frac{p+1}{2}} \partial_k \in \mathfrak{C}(L)$, а значит и $C^0 \in \mathfrak{C}(L)$.

Итак, мы доказали, что $C = (C^0 + C^1) \in \mathfrak{C}(L)$, откуда $\mathfrak{C}(W_m) \cap L \subseteq \mathfrak{C}(L)$. Таким образом, теорема 1.1 для $L = W(\mathfrak{F})$ доказана.

Следствие 2.2. *Пусть* $L = W(m)$ *- алгебра Цассенхауза* $(n = 1)$, $\bigoplus_{i=-1}^{p^m-2} L_{[i]}$ *- стандартная градуировка в алгебре* L *и* $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ *- p-адическое разложение натурального числа* a, *то* $L_{[a-1]} \subset \mathfrak{C}(L)$ *тогда и только тогда, когда* $\sum_{i \geq 0} a_i > \frac{p+1}{2}$ *или когда* $a_0 = 0$ *и* $\sum_{i \geq 1} a_i = \frac{p+1}{2}$.

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 1.1 для $L = W(\mathfrak{F})$ и из того, что каждый член градуировки алгебры Цассенхауза одномерен, а значит либо он содержится в сэндвичевой подалгебре, либо имеет нулевое пересечение с ней. Более того, пусть $k_1,\ldots,k_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначим через $|k_s|$ сумму $k_1 + \ldots + k_s$ и через N_s сумму $k_1 p^{m-1} + \ldots + k_s p^{m-s}$, тогда имеет место

Следствие 2.3. *Пусть* $L = W(m)$ *- алгебра Цассенхауза,* $\bigoplus_{i=-1}^{p^m-2} L_{[i]}$ *- стандартная градуировка в* L *и* $\mathfrak{C}(L)$ *- сэндвичева подалгебра в* L, *тогда*

$$\mathfrak{C}(L) = \sum_{k_1=0}^{\frac{p-1}{2}} \Big\{ \sum_{k_2=0}^{\frac{p-1}{2}-|k_1|} \Big\{ \dots \Big\{ \sum_{k_{m-2}=0}^{\frac{p-1}{2}-|k_{m-3}|} \Big\{ \sum_{k_{m-1}=0}^{\frac{p-1}{2}-|k_{m-2}|}$$

$$\sum_{i=\frac{p+1}{2}-|k_{m-1}|}^{p-2} L_{[N_{m-1}+i]} \oplus \sum_{i=(\frac{p+1}{2}-|k_{m-2}|)p-1}^{p^2-2} L_{[N_{m-2}+i]} \Big\} \oplus$$

$$\oplus \sum_{i=(\frac{p+1}{2}-|k_{m-3}|)p^2-1}^{p^3-2} L_{[N_{m-3}+i]} \Big\} \oplus \dots \Big\} \oplus$$

$$\oplus \sum_{i=(\frac{p+1}{2}-|k_1|)p^{m-2}-1}^{p^{m-1}-2} L_{[N_1+i]} \Big\} \oplus \sum_{i=\frac{p+1}{2}p^{m-1}-1}^{p^m-2} L_{[i]}.$$

§ 3. Подалгебра $\mathfrak{C}$ в алгебре $S(\mathfrak{F},\omega)$

Пусть $L = S(\mathfrak{F},\omega)$. Покажем сначала включение $\mathfrak{C}(L) \subseteq \mathfrak{C}(W_m) \cap L$.

Рассмотрим $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \in C(L)$, т.е. $(\mathrm{ad}\, C)^2 = 0$. В силу леммы 1.6 коэффициенты c_i удовлетворяют условию $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ $\forall i$. Отсюда, согласно лемме 1.9, получаем, что C есть сумма дифференцирований $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{R}_{ij}$. Если $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, то $a\,\varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(\varphi) \in W_{m,\left[\frac{p+1}{2}\right]}$ и $\mathfrak{D}_{ij}(a) \in W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$. А так как $\mathrm{div}\, \mathfrak{D}_{ij}(a) = 0$, то по предложению 5.1 главы 0 $\mathfrak{D}_{ij}(a) \in \mathfrak{C}(W_m)$

Если $a \in \bar{\mathcal{R}}_{ij}$, то легко проверить, что $\operatorname{div}(\mathrm{pr}_{W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}}\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a))=$ $= 0$ (это следует из формулы (0.20) и вида элементов из $\bar{\mathcal{R}}_{ij}$), поэтому, согласно предложению 5.1 главы 0, $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) \in \mathfrak{C}(W_m)$.

Таким образом, мы показали, что $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) \in \mathfrak{C}(W_m)$ для всех $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathcal{R}}_{ij}$, а значит и $C \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$. Покажем теперь обратное включение $\mathfrak{C}(W_m) \cap L \subseteq \mathfrak{C}(L)$.

Пусть $C \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$, тогда по предложению 5.1 главы 0 $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ для всех i. В силу леммы 1.9, C есть сумма дифференцирований $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathcal{R}}_{ij}$. Из леммы 1.8 следует, что достаточно показать принадлежность $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$ к $\mathfrak{C}(L)$ лишь для $a \in \bar{\mathcal{R}}_{ij}$. Представим многочлен $a \in \bar{\mathcal{R}}_{ij}$ в виде суммы $a_1 + a_2$, где $a_1 \in \bar{\mathcal{R}}_{ij} \setminus \mathcal{R}_{ij}^{\frac{p+3}{2}}$, $a_2 \in \mathcal{R}_{ij}^{\frac{p+3}{2}} \subset \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$. Согласно лемме 1.8 $\mathfrak{D}_{ij}(a_2) \in \mathfrak{C}(L)$, поэтому можно положить $a = a_1$. Поскольку $a \in \bar{\mathcal{R}}_{ij}$, то

$$a = \sum_{(\alpha)} h_{(\alpha)} \prod_{l=2}^{m_i} y_{il}^{\alpha_{il}} \prod_{k=2}^{m_j} y_{jk}^{\alpha_{jk}},$$

где сумма берется по всем наборам неотрицательных целых чисел $(\alpha) = (\alpha_{i2},\dots,\alpha_{im_i},\alpha_{j2},\dots,\alpha_{jm_j})$, для которых $0 \neq h_{(\alpha)} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}^{(i,j)})$, причем $\Delta = \sum_l \alpha_{il} + \sum_k \alpha_{jk} \leqslant \frac{p+1}{2}$. Из (0.19) получаем

$$a = \sum_{(\alpha)} h_{(\alpha)} \prod_{l,k} \left[x_i^{(p^{l-1})}\right]^{\alpha_{il}} \left[x_j^{(p^{k-1})}\right]^{\alpha_{jk}} =$$

$$= \sum_{(\alpha)} \tilde{h}_{(\alpha)} \prod_{l,k} \left[x_i^{(p^{l-2})}\right]^{(p\alpha_{il})} \left[x_j^{(p^{k-2})}\right]^{(p\alpha_{jk})}.$$

Положим $q = \prod_{l,k} \left[x_i^{(p^{l-2})}\right]^{(p\alpha_{il})} \cdot \left[x_j^{(p^{k-2})}\right]^{(p\alpha_{jk})}$ для произвольного набора (α), тогда по лемме 7.5 главы 0

$$q = \sum_{s \in \mathcal{J}} g_s^{(\Delta p)} + z.$$

Легко проверяется, что дифференцирование $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(g_s^{(\Delta p)})$ удовлетворяет соотношениям (0.12) предложения 5.2 главы 0, т.е. $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(g_s^{(\Delta p)}) \in C(W(\mathfrak{F})) \cap L \subseteq C(L)$. А так как $z \in \mathfrak{M}^p \subset \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, то, в силу леммы 1.8, получаем, что $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(q) \in \mathfrak{C}(L)$, откуда $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) \in \mathfrak{C}(L)$.

Итак, мы показали, что любое дифференцирование $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$, $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{R}_{ij}$, лежит в $\mathfrak{C}(L)$. Отсюда $\mathfrak{C}(W_m) \cap L \subseteq \mathfrak{C}(L)$. Теорема 1.1 для $L = S(\mathfrak{F},\omega)$ доказана.

Следствие 3.1. *Пусть* $L = S(\mathfrak{F},\omega)$, *тогда*

$$\mathfrak{C}(L) = \langle \bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) \mid a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{R}_{ij} \rangle.$$

§ 4. Подалгебра $\mathfrak{C}$ в алгебре $H(\mathfrak{F},\omega)$

Пусть $L = H(\mathfrak{F},\omega)$. Покажем сначала включение $\mathfrak{C}(L) \subseteq \mathfrak{C}(W_m) \cap L$.

Рассмотрим $C = \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \in C(L)$. По лемме 1.6 коэффициенты c_i удовлетворяют условию $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ $\forall i$. Отсюда, согласно лемме 1.9, получаем, что $C = \bar{\mathfrak{D}}_a$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathfrak{M}}$. Пусть $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, тогда $\mathfrak{D}_a \in W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$, $a\mathfrak{D}_\omega \in W_{m,\left[\frac{p+1}{2}\right]}$. Из замечания 1.5 и формулы (0.20) получаем, что часть дифференцирования $\mathfrak{D}_a$, которая попадает в $W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$, имеет вид

$$\tilde{\mathfrak{D}} = \mathrm{pr}_{W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}} \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{j1} a\, \partial_{i1} = \mathrm{pr}_{W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}} \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{i1} a \partial_{\tilde{i}1} - \partial_{\tilde{i}1} a \partial_{i1}).$$

Очевидно, что $\operatorname{div} \tilde{\mathfrak{D}} = 0$, следовательно, по предложению 5.1 главы 0, $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(\bar{W}_m)$.

Пусть $a \in \bar{\mathfrak{M}}$, тогда $\mathfrak{D}_a \in W_{m,(p-1)}$, $a\mathfrak{D}_\omega \in W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$. Поскольку $a \in \mathcal{O}_{m-n}$, то $\operatorname{div}(\operatorname{pr}_{W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}} a\mathfrak{D}_\omega) = 0$, поэтому в силу предложения 5.1 главы 0 $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(W_m)$, а значит и $C \in \mathfrak{C}(W_m)$.

Покажем теперь обратное включение. Рассмотрим C из пересечения $\mathfrak{C}(W_m) \cap L$. По предложению 5.1 главы 0 $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ $\forall i$. Тогда, согласно лемме 1.9, $C = \bar{\mathfrak{D}}_a$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathfrak{M}}$. Из леммы 1.8 следует, что нам достаточно доказать принадлежность $\bar{\mathfrak{D}}_a$ к $\mathfrak{C}(L)$ лишь для $a \in \bar{\mathfrak{M}}$. Представим многочлен a в виде суммы $a_1 + a_2$, где a_1 – сумма форм из $\bar{\mathfrak{M}}$, имеющих степень $\leqslant \frac{p+1}{2}$, а $a_2 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$. В силу леммы 1.8 $\bar{\mathfrak{D}}_{a_2} \in \mathfrak{C}(L)$, поэтому можно считать, что $a = a_1$. А так как $a \in \bar{\mathfrak{M}} \subset \mathcal{O}_{m-n}$, то

$$a = \sum_{(\alpha)} \beta_{(\alpha)} \prod_{i=1}^{n} \prod_{s=2}^{m_i} y_{is}^{\alpha_{is}},$$

где сумма берется по всем наборам неотрицательных целых чисел $(\alpha) = (\alpha_{12},\dots,\alpha_{1m_1},\dots,\alpha_{n2},\dots,\alpha_{nm_n})$, для которых $0 \neq \beta_{(\alpha)} \in K$, причем $\Delta = \sum_{i,s} \alpha_{is} \leqslant \frac{p+1}{2}$. Из (0.19) получаем

$$a = \sum_{(\alpha)} \beta_{(\alpha)} \prod_{i,s} \left[x_i^{(p^{s-1})}\right]^{\alpha_{is}} = \sum_{(\alpha)} \tilde{\beta}_{(\alpha)} \prod_{i,s} \left[x_i^{(p^{s-2})}\right]^{(p\alpha_{is})}.$$

Пусть $h = \prod_{i,s} \left[x_i^{(p^{s-2})}\right]^{(p\alpha_{is})}$ (для фиксированногонабора (α)), тогда по лемме 7.5 главы 0

$$h = \sum_j g_j^{(\Delta p)} + z.$$

Легко проверяется, что дифференцирование $\bar{\mathfrak{D}}_{g_j^{(\Delta p)}}$ удовлетворяет соотношениям (0.12) предложения 5.2 главы 0, т.е. $\bar{\mathfrak{D}}_{g_j^{(\Delta p)}} \in C(W(\mathfrak{F})) \cap L \subseteq C(L)$. С другой стороны, $z \in \mathfrak{M}^p \subset \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, поэтому, в силу леммы 1.8, $\bar{\mathfrak{D}}_h \in \mathfrak{C}(L)$, откуда $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(L)$.

Итак, мы показали, что любое дифференцирование $\bar{\mathfrak{D}}_a$, где

$a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathfrak{M}}$, лежит в $\mathfrak{C}(L)$, т.е. $\mathfrak{C}(W_m) \cap L \subseteq \mathfrak{C}(L)$. Теорема 1.1 для $L = H(\mathfrak{F},\omega)$ доказана.

Следствие 4.1. *Пусть* $L = H(\mathfrak{F},\omega)$, *тогда*

$$\mathfrak{C}(L) = \langle\, \bar{\mathfrak{D}}_a \mid a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathfrak{M}} \,\rangle.$$

§ 5. Подалгебра $\mathfrak{C}$ в алгебре $K(\mathfrak{F})$

Пусть $L = K(\mathfrak{F})$ и $C = \sum_{i=1}^{n} c_i\partial_i \in C(L)$. Из лемм 1.6 и 1.9 следует, что $C = \bar{\mathfrak{D}}_a$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \bar{\mathfrak{M}}$. В силу замечания 1.7, коэффициенты c_i удовлетворяют условиям $c_i c_j = 0 \ \forall i,j$. Отсюда можно получить (см. например [35]), что многочлен a на самом деле лежит в $\mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}}$, где $\mathfrak{N} = \langle\, x^{(\alpha)} \mid p|\alpha_i \ \forall i \,\rangle$. Аналогично, как и в случае $H(\mathfrak{F},\omega)$, показывается, что $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$, т.е. $\mathfrak{C}(L) \subseteq \mathfrak{C}(W_m) \cap L$.

Покажем теперь, что обратное включение не всегда имеет место. Пусть $C \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$. Из предложения 5.1 главы 0, лемм 1.6 и 1.9 получаем, что

$$\mathfrak{C}(W_m) \cap L = \langle\, \bar{\mathfrak{D}}_a \mid a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}} \text{ и } \operatorname{div}(\mathrm{pr}_{W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}} \bar{\mathfrak{D}}_a) = 0 \,\rangle.$$

Если $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, то по лемме 1.8 $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(L)$. Пусть a – форма степени $\frac{p+1}{2}$ из $\mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}}$ в O_m, тогда из (0.20) и (2.1) имеем

$$\mathfrak{D} = \mathrm{pr}_{W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}} \bar{\mathfrak{D}}_a = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i1}(\partial_{n1}a)\partial_{i1} + 2\, a\, \partial_{n1}.$$

Отсюда получаем, что $\operatorname{div} \mathfrak{D} = (n + 1)\, \partial_{n1}a$. Если $n + 1 \not\equiv 0 \pmod p$, то равенство нулю дивергенции возможно лишь при $a \in \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}}$. Но тогда, как и в случае $H(\mathfrak{F},\omega)$, можно показать, что

$\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(L)$, т.е. $\mathfrak{C}(W_m) \cap L \subseteq \mathfrak{C}(L)$. Если же $n + 1 \equiv 0 \pmod p$, то из приведенных выше рассуждений следует, что $\mathfrak{C}(W_m) \cap L = {}$ $= \langle \bar{\mathfrak{D}}_a \mid a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}} \rangle$, а согласно работам [34] и [35] $\mathfrak{C}(L) = \langle \bar{\mathfrak{D}}_a \mid a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} + \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}} \rangle$, т.е., если рассмотреть, например, $a = x_n^{\frac{p+1}{2}}$, то $\bar{\mathfrak{D}}_a \in \mathfrak{C}(W_m) \cap L$, но $\bar{\mathfrak{D}}_a \notin \mathfrak{C}(L)$. Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

§ 6. Нормализатор сэндвичевой подалгебры

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathfrak{L}_0$ *– нулевой член стандартной фильтрации алгебры* $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$, $K(\mathfrak{F})$, *тогда* $\mathfrak{L}_0 = \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$.

Доказательство. Для $L = K(\mathfrak{F})$ (при $n + 1 \equiv 0 \pmod p$) доказательство см. в работе [35]. Пусть $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ или $K(\mathfrak{F})$ (при $n + 1 \not\equiv 0 \pmod p$). Покажем, что $\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$.

$$[\, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{C}(L)\,] = [\, \mathfrak{L}_0, \mathfrak{C}(W_m) \cap L\,] \subseteq [\, W_{m,(0)}, \mathfrak{C}(W_m)\,] \cap L \subseteq$$
$$\subseteq \mathfrak{C}(W_m) \cap L = \mathfrak{C}(L),$$

откуда $\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$. Так как $\mathfrak{L}_0$ – максимальная подалгебра в L, поэтому либо $\mathfrak{L}_0 = \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$, либо $L = \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$. Но $\mathfrak{C}(L)$ – идеал в $\mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$, а L – простая алгебра Ли, следовательно, $L \neq \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$ и $\mathfrak{L}_0 = \mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$. Теорема доказана.

Из теоремы 6.1 следует, что $\mathcal{N}_L(\mathfrak{C}(L))$ – максимальная подалгебра в $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$ или $K(\mathfrak{F})$. Таким образом, гипотеза А.И.Кострикина, сформулированная в §5 главы 0, справедлива для этих четырех серий конечномерных простых алгебр Ли.

Глава 3. СЭНДВИЧЕВА ПОДАЛГЕБРА В АЛГЕБРАХ МЕЛИКЯНА

В данной главе мы найдем сэндвичеву подалгебру в алгебрах Меликяна (теорема 1.1) и докажем справедливость гипотезы А.И.Кострикина (см. §5 гл.0) для этих алгебр (торема 4). Всюду в этой главе K - поле характеристики $p = 5$, $n = 2$, $E = \langle x_1, x_2 \rangle$ - 2-мерное векторное пространство над K, $\mathfrak{F}$ - флаг в пространстве E и $m = m_1 + m_2$.

§ 1. Основные леммы

Этот и следующий параграфы необходимы нам для доказательства следующей

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathfrak{C}$ *- сэндвичева подалгебра в алгебре Меликяна* $\mathfrak{Z} = L(m_1, m_2)$ *(см. §6 главы 0), а* $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$ *- сэндвичева подалгебра в алгебре* $W(\mathfrak{F})$*. Тогда*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(W(\mathfrak{F})) \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{Z}_{\bar 1} \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{Z}_{\bar 2}.$$

Пусть $C(\mathfrak{Z}_{\bar s}) = C(\mathfrak{Z}) \cap \mathfrak{Z}_{\bar s}$, $\bar s \in \mathbb{F}_3$. Из предложения 5.2 главы 0 получаем

Следствие 1.2. *Пусть* $C \in C(W(\mathfrak{F}))$*, тогда*

1) $C(C(f)) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{O}(\mathfrak{F});$
2) $C(\operatorname{div} C) = 0;$
3) $(\operatorname{div} C)^2 = 0;$
4) $C(f) \operatorname{div} C = 0; \quad \forall f \in \mathcal{O}(\mathfrak{F});$
5) $(\operatorname{div} C)\, C = 0;$
6) $(\operatorname{div} C)\, \mathfrak{D}(C) = 0, \quad \forall \mathfrak{D} \in W,$ *где* $\mathfrak{D}(C) = \sum\limits_i \mathfrak{D}(c_i)\partial_i.$

Доказательство. По условию $(\operatorname{ad} C)^2 = 0$, следовательно для C выполняются соотношения (0.12) предложения 5.2 главы 0, тогда

1) $C(C(f)) = C\left[\sum_{i=1}^{2} c_i\partial_i f\right] = \sum_{i,j=1}^{2}(c_jc_i\partial_i\partial_j f + c_j(\partial_j c_i)(\partial_i f)) =$

$= 0;$

2) $C(\mathrm{div}\ C) = \sum_{i=1}^{2} c_i\partial_i(\mathrm{div}\ C) = 0;$

3) $(\mathrm{div}\ C)^2 = \sum_{i,j=1}^{2}(\partial_i c_i)(\partial_j c_j) = \sum_{i,j}(\partial_i(c_i\partial_j c_j) - c_i\partial_i\partial_j c_j) =$

$= -\sum_i c_i\partial_i\ \mathrm{div}\ C = 0;$

4) $C(f)\ \mathrm{div}\ C = \sum_i c_i(\partial_i f)\sum_j \partial_j c_j = \sum_{i,j}(c_i\partial_j c_j)(\partial_i f) = 0;$

5) $(\mathrm{div}\ C)\ C = \sum_i(\partial_i c_i)\sum_j(c_j\partial_j) = \sum_{i,j} c_j\partial_i c_i\partial_j = 0;$

6) Пусть $\mathfrak{D} = \sum_k f_k\partial_k$, тогда

$(\mathrm{div}\ C)\ \mathfrak{D}(C) = \sum_i(\partial_i c_i)\sum_k f_k\partial_k\left[\sum_j c_j\partial_j\right] = \sum_{ijk} f_k(\partial_k c_j)(\partial_i c_i)\partial_j =$

$= \sum_{ijk} f_k(\partial_k(c_j\partial_i c_i) - c_j\partial_k\partial_i c_i)\partial_j = -\sum_{j,k} f_k\ c_j\ \partial_k(\mathrm{div}\ C)\partial_j = 0.$

Лемма 1.3. $C(\mathfrak{J}_{\bar 0}) = C(W(\mathfrak{F}))$.

Доказательство. В одну сторону включение очевидно, т.к. если $C \in C(\mathfrak{J}_{\bar 0}) = C(\mathfrak{J}) \cap W(\mathfrak{F})$, то $(\mathrm{ad}\ C)^2\ \mathfrak{D} = 0$ для всех $\mathfrak{D} \in \mathfrak{J}$. В частности и для всех $\mathfrak{D} \in W(\mathfrak{F})$, т.е. $C \in C(W(\mathfrak{F}))$, откуда $C(\mathfrak{J}_{\bar 0}) \subseteq C(W(\mathfrak{F}))$. Покажем теперь обратное включение. Пусть $C \in C(W(\mathfrak{F}))$,т.е. $(\mathrm{ad}\ C)^2\ \mathfrak{D} = 0$ для всех $\mathfrak{D}$ из $\mathfrak{J}_{\bar 0} = W(\mathfrak{F})$.

Рассмотрим два случая

а) $\mathfrak{D} = f\ \omega^{-1/3} \in \mathfrak{J}_{\bar 1}$, тогда из (0.14) и следствия 1.2 имеем

$[\,C,[\,C,\ \mathfrak{D}\,]\,] = [\,C,(C(f) - 2\ f\ \mathrm{div}\ C)\ \omega^{-1/3}\,] = \{C(C(f)) -$

$- 2(C(f)\operatorname{div} C + fC(\operatorname{div} C)) - 2(C(f) - 2f \operatorname{div}C)\operatorname{div}C\}\omega^{-1/3} = 0.$

б) $\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}\,\omega^{1/3} \in \tilde{W}(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{D} = \sum_k f_k\partial_k \in W(\mathfrak{F})$, тогда из (0.15) и следствия 1.2 получим, что

$$[\,C,[\,C,\ \tilde{\mathfrak{D}}\,]\,] = 2\{C(\operatorname{div} C)\mathfrak{D} + 2(\operatorname{div} C)(C\,\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\,C)\}\omega^{1/3} = 0.$$

Таким образом, $(\operatorname{ad} C)^2\,\mathfrak{D} = 0$ для всех $\mathfrak{D} \in \mathfrak{J}$, т.е. $C \in C(\mathfrak{J}_{\bar{0}})$.

Лемма 1.4. *Пусть* $C = f\,\omega^{-1/3} \in \mathfrak{J}_{\bar{1}}$, *тогда условия*

$$f^2 = 0, \quad f\,\partial_i\partial_j f = 0, \quad (\partial_i f)(\partial_j f) = 0, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 2, \tag{3.1}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $(\operatorname{ad} C)^2 = 0$ *в* $\mathfrak{J}$.

Доказательство. Сначала проведём некоторые вычисления. Пусть $\mathfrak{D} = \sum_{k=1}^{2} g_k\partial_k \in \mathfrak{J}_{\bar{0}}$, тогда из (0.14) и (0.16) имеем

$$\begin{aligned}[\,C,[\,C,\ \mathfrak{D}\,]\,] &= -2\sum_k\{2\,f^2\partial_2\partial_k g_k - f(\partial_k f)\partial_2 g_k + g_k((\partial_k f)(\partial_2 f) -\\ &- f\partial_2\partial_k f)\}\,\tilde{\partial}_1 + 2\sum_k\{2\,f^2\partial_1\partial_k g_k - f(\partial_k f)\partial_1 g_k + g_k((\partial_k f)(\partial_1 f) -\\ &- f\partial_1\partial_k f)\}\,\tilde{\partial}_2.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Пусть теперь $\mathfrak{D} = g\,\omega^{-1/3} \in \mathfrak{J}_{\bar{1}}$, тогда из (0.16) и (0.17) получаем

$$[\,C,[\,C,\ \mathfrak{D}\,]\,] = 2(fg\,\partial_2 f - f^2\partial_2 g)\partial_1 + 2(f^2\partial_1 g - fg\,\partial_1 f)\partial_2. \tag{3.3}$$

Положим $\tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}\,\omega^{1/3} = \sum_{k=1}^{2} g_k\tilde{\partial}_k \in \mathfrak{J}_{\bar{2}}$. Отсюда, из (0.17) и (0.14) получаем, что

$$[\,C,[\,C,\ \tilde{\mathfrak{D}}\,]\,] = \sum_k(2\,f^2\partial_k g_k + f(\partial_k f)g_k)\ \omega^{-1/3}. \tag{3.4}$$

Допустим, что выполнены условия (3.1), т.е. $f^2 = 0$ (откуда $f\partial_i f = 0$), $f\partial_i\partial_j f = 0$ и $(\partial_i f)(\partial_j f) = 0$, тогда из (3.2), (3.3) и (3.4) видно, что $(\operatorname{ad} C)^2\mathfrak{D} = 0\ \ \forall\,\mathfrak{D} \in \mathfrak{J}$. Покажем теперь необходимость этих условий.

Пусть $(\mathrm{ad}\ C)^2 = 0$ в $\mathfrak{J}$. Положим в формуле (3.3) $g = 1$ и получим

$$f\ \partial_i f = 0, \qquad (i = 1,2). \tag{3.5}$$

Отсюда и из (3.4) при $\tilde{\mathfrak{D}} = x_1\tilde{\partial}_1$ имеем $f^2 = 0$. Положив сначала $\mathfrak{D} = \partial_1$ в формуле (3.2), а затем $\mathfrak{D} = \partial_2$, получим, что

$$(\partial_i f)(\partial_j f) - f\ \partial_i\partial_j f = 0\ , \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant 2. \tag{3.6}$$

Дифференцируя формулу (3.5) по x_j, имеем

$$(\partial_i f)(\partial_j f) + f\ \partial_i\partial_j f = 0\ , \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant 2. \tag{3.7}$$

Тогда из (3.6) и (3.7) получаем остальные условия леммы.

Лемма 1.5. *Пусть* $\tilde{C} = \sum_{i=1}^{2} c_i\tilde{\partial}_i \in \tilde{W}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}_{\bar{2}}$, *тогда условия*

$$c_i c_j = 0, \quad c_i\partial_k c_j = 0, \quad 1 \leqslant i,j,k \leqslant 2, \tag{3.8}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $(\mathrm{ad}\ \tilde{C})^2 = 0$ *в* $\mathfrak{J}$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1.4, проведем сначала некоторые вычисления. Пусть $\mathcal{A} = \sum_j a_j\partial_j \in \mathfrak{J}_{\bar{0}}$, тогда из (0.15) и (0.18)

$$[\ \tilde{C},[\ \tilde{C},\ \mathcal{A}\ ]\ ] = \sum_i \{a_i(c_2\partial_i c_1 - c_1\partial_i c_2) +$$

$$+\ c_i(c_1\partial_i a_2 - c_2\partial_i a_1)\}\ \omega^{-1/3}. \tag{3.9}$$

Пусть $\mathcal{A} = f\ \omega^{-1/3} \in \mathfrak{J}_{\bar{1}}$, тогда

$$[\ \tilde{C},[\ \tilde{C},\ \mathcal{A}\ ]\ ] = \sum_{i,j}\{\ c_i c_j\partial_i f + 2\ f c_j\partial_i c_i\ \}\ \tilde{\partial}_j. \tag{3.10}$$

Положим $\tilde{\mathcal{A}} = \sum_j a_j\tilde{\partial}_j \in \mathfrak{J}_{\bar{2}}$, тогда

$$[\ \tilde{C},[\ \tilde{C},\ \tilde{\mathcal{A}}\ ]\ ] = \sum_i \{\ c_2 c_i a_1 - c_1 c_i a_2\ \}\ \partial_i. \tag{3.11}$$

Из формул (3.9),(3.10) и (3.11) видно,что выполнение условий (3.8) влечет принадлежность $\tilde{C} \in C(\mathfrak{J}_{\bar{2}})$.Наоборот, если $(\mathrm{ad}\,\tilde{C})^2 = 0$ в $\mathfrak{J}$, то, положив в (3.11) $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\partial}_1$,а затем $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\partial}_2$, получим

$$c_i c_j = 0 \qquad (i,j = 1,2). \qquad (3.12)$$

Подставим теперь в (3.9) последовательно $\mathcal{A} = \partial_1$, $\mathcal{A} = \partial_2$, тогда

$$\begin{aligned} c_2\partial_1 c_1 - c_1\partial_1 c_2 &= 0, \\ c_2\partial_2 c_1 - c_1\partial_2 c_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Дифференцируя (3.12), имеем

$$c_i\partial_k c_j + c_j\partial_k c_i = 0 \quad (1 \leqslant i,j,k \leqslant 2). \qquad (3.14)$$

Тогда из (3.13) и (3.14) получаем, что $c_i\partial_k c_j = 0 \quad \forall\, i,j,k \in \{1,2\}$.

§ 2. Однородные сэндвичевы пространства

В этом параграфе мы найдем пространство

$$\mathfrak{C}^* = \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{0}})\rangle \oplus \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle \oplus \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{2}})\rangle,$$

где $\langle C(\mathfrak{J}_{\bar{s}})\rangle$ - линейная оболочка множества $C(\mathfrak{J}_{\bar{s}})$. В силу леммы 1.3, $\langle C(\mathfrak{J}_{\bar{0}})\rangle = \langle C(\mathrm{W}(\mathfrak{F})')\rangle = \mathfrak{C}(\mathrm{W}(\mathfrak{F}))$ -сэндвичева подалгебра в $\mathrm{W}(\mathfrak{F})$ (описание $\mathfrak{C}(\mathrm{W}(\mathfrak{F}))$ см. в главе 2).

Пусть $\mathfrak{N} = \langle x_1^{(\alpha_1)} x_2^{(\alpha_2)} \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}) \mid \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, p|\alpha_1$ и $p|\alpha_2\rangle$. Другое описание : $\mathfrak{N}$ - максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_{m-2}$ ($\mathcal{O}_{m-2}$ - подкольцо в $\mathcal{O}_m$, не содержащее переменных y_{11} и y_{21}). Тогда справедлива

Лемма 2.1. $\langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle = \left(\mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}} + \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} \right) \mathfrak{J}_{\bar{1}}$.

Доказательство. Пусть $f\,\omega^{-1/3} \in C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})$, тогда f удовлетворяет условиям (3.1) леммы 1.4, что в силу леммы 7.2 главы 0 означает $v_y(f) \geqslant \frac{p+1}{2}$, т.е. $f \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$. Отсюда $\langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle \subset \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar{1}} = \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \omega^{-1/3}$. Представим многочлен f в виде суммы $f_0 + f_1$, где f_0 - форма степени $\frac{p+1}{2}$, а $f_1 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$. Первое соотношение леммы 1.4 имеет вид $f^2 = (f_0 + f_1)^2 = 0$, откуда $f_0^2 = 0$ (т.к. f_0 - форма младшей степени многочлена f). Из леммы 7.1 главы 0 следует, что $f_0 = l^{\frac{p+1}{2}}$, где

$$l = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\, y_{ij}, \qquad \alpha_{ij} \in K. \tag{3.15}$$

В силу (3.1) $(\partial_t f)^2 = 0$, откуда

$$\left[\frac{p+1}{2}\, l^{\frac{p-1}{2}} \partial_t l + \partial_t f_1 \right]^2 = \left[\frac{p+1}{2}\right]^2 l^{p-1} (\partial_t l)^2 + l^{\frac{p-1}{2}} (\partial_t l)(\partial_t f_1) + (\partial_t f_1)^2 = 0. \tag{3.16}$$

Используя (0.20) и (3.15), получаем

$$\partial_t l = \alpha_{t1} + \sum_{j=2}^{m_t} (-1)^{j+1} \alpha_{tj}\, y_{t1}^{p-1} \ldots y_{t,j-1}^{p-1}. \tag{3.17}$$

По условию $v_y(f_1) \geqslant \frac{p+3}{2}$, поэтому в силу (0.20) $v_y(\partial_t f_1) \geqslant \frac{p+1}{2}$, отсюда и из (3.16) имеем

$$\left[\frac{p+1}{2} \right]^2 l^{p-1} (\partial_t l)^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}^p}. \tag{3.18}$$

Из (3.17) и (3.18) получаем $\alpha_{t1}^2 = 0$, откуда (в силу произвольности t) $\alpha_{11} = \alpha_{21} = 0$, т.е. $f_0 \in \mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}}$. Итак, мы показали, что

$$\langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle \subseteq \left[\mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}} + \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}} \right] \mathfrak{J}_{\bar{1}}.$$

Покажем теперь обратное включение. Пусть $f \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, тогда согласно лемме 7.3 гл.0, $f = \sum_j l_j^{\frac{p+3}{2}} g_j$. Легко проверить, что многочлен $l_j^{\frac{p+3}{2}} g_j$ удовлетворяет соотношениям (3.1) леммы 1.4, т.е. $l_j^{\frac{p+3}{2}} g_j\, \omega^{-1/3} \in C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})$, отсюда $f\, \omega^{-1/3} \in \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle$. Таким образом, для того чтобы получить обратное включение нам необходимо лишь показать, что элемент $f\,\omega^{-1/3}$, где f - форма степени $\frac{p+1}{2}$ в $\mathfrak{N}$, лежит в $\langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle$.

Пусть $h_{(\beta)}$- моном вида

$$h_{(\beta)} = \prod_{i=2}^{m_1} y_{1i}^{\beta_{1i}} \prod_{j=2}^{m_2} y_{2j}^{\beta_{2j}} = y_{12}^{\beta_{12}} \dots y_{1m_1}^{\beta_{1m_1}} y_{22}^{\beta_{22}} \dots y_{2m_2}^{\beta_{2m_2}},$$

где $(\beta) = (\beta_{12},\dots,\beta_{1m_1},\beta_{22},\dots,\beta_{2m_2})$ и $\sum_i \beta_{1i} + \sum_j \beta_{2j} = \frac{p+1}{2} < p$. Из (0.19) получаем

$$h_{(\beta)} = \prod_{ij} \left[x_1^{(p^{i-1})}\right]^{\beta_{1i}} \left[x_2^{(p^{j-1})}\right]^{\beta_{2j}} =$$

$$= \lambda \prod_{ij} \left[x_1^{(p^{i-2})}\right]^{(\beta_{1i}p)} \left[x_2^{(p^{j-2})}\right]^{(\beta_{2j}p)},$$

где $\lambda \in K$. По лемме 7.5 главы 0

$$h_{(\beta)} = \sum_s g_s^{(\frac{p+1}{2}p)} + z.$$

Нетрудно проверить, что многочлен $g_s^{(\frac{p+1}{2}p)}$ удовлетворяет соотношениям (3.1) леммы 1.4, т.е. $g_s^{(\frac{p+1}{2}p)}\omega^{-1/3} \in C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})$. С другой стороны, $z \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, т.е. $z\,\omega^{-1/3} \in \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle$, откуда и $h_{(\beta)} \in \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle$. А так как форма f есть линейная комбинация мономов вида $h_{(\beta)}$, то $f\,\omega^{-1/3} \in \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle$. Тогда

$$\left[\mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}} + \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}\right] \mathfrak{J}_{\bar{1}} \subset \langle C(\mathfrak{J}_{\bar{1}})\rangle.$$

Лемма 2.2. $\langle C(\mathfrak{I}_{\bar{2}})\rangle = \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}\mathfrak{I}_{\bar{2}}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{C} = c_1\tilde{\partial}_1 + c_2\tilde{\partial}_2 \in \langle C(\mathfrak{I}_{\bar{2}})\rangle$, тогда коэффициенты c_i удовлетворяют соотношениям (3.8) леммы 1.5, откуда в силу леммы 7.2 главы 0 следует, что $v_y(c_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$, т.е. $c_i \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$. Таким образом, имеем включение

$$\langle C(\mathfrak{I}_{\bar{2}})\rangle \subset \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}\mathfrak{I}_{\bar{2}}.$$

Наоборот, если $\tilde{C} = c_1\tilde{\partial}_1 + c_2\tilde{\partial}_2 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}\mathfrak{I}_{\bar{2}}$, то $c_i \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$. Следовательно, по лемме 7.3 главы 0,

$$c_i = \sum_j l_{ij}^{\frac{p+1}{2}} g_{ij},$$

где l_{ij} - линейные формы в $\mathcal{O}_m$. Легко проверяется, что многочлен $l_{ij}^{\frac{p+1}{2}} g_{ij}$ удовлетворяет соотношениям (3.8) леммы 1.5, то есть $l_{ij}^{\frac{p+1}{2}} g_{ij}\tilde{\partial}_i \in C(\mathfrak{I}_{\bar{2}})$, а значит $\tilde{C} \in \langle C(\mathfrak{I}_{\bar{2}})\rangle$. Откуда

$$\mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}\mathfrak{I}_{\bar{2}} \subset \langle C(\mathfrak{I}_{\bar{2}})\rangle.$$

Леммы 1.3, 2.1 и 2.2 резюмирует

Предложение 2.3. $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}(W(\mathfrak{F})) \oplus \left[\mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} + \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}\right]\mathfrak{I}_{\bar{1}} \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}\mathfrak{I}_{\bar{2}}$.

Замечание 2.4. Очевидно, что $\langle C(\mathfrak{I}_{\bar{s}})\rangle \subseteq \mathfrak{C} \cap \mathfrak{I}_{\bar{s}}$, хотя обратное включение, как это будет показано ниже, имеет место лишь для $\bar{s} = \bar{0}$ и $\bar{2}$, поэтому $\mathfrak{C}^* \subset \mathfrak{C}$ (включение строгое).

§ 3. Доказательство теоремы

В данном параграфе будет доказано, что множество $\mathfrak{C}$ совпадает с

$$\mathfrak{E}^{**} = \mathfrak{E}(W(\mathfrak{F})) \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar 1} \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar 2}.$$

Любой элемент C из $\mathfrak{J}$ можно единственным образом представить в виде

$$C = \mathcal{A} + \hat{f} + \tilde{B}, \tag{3.19}$$

где $\mathcal{A} = \sum\limits_i a_i \partial_i \in W(\mathfrak{F})$, $\hat{f} = f\,\omega^{-1/3}$, $f \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$, $\tilde{B} = B\,\omega^{1/3} \in \tilde{W}(\mathfrak{F})$, а $B = \sum\limits_i b_i\partial_i \in W(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{D} \in \mathfrak{J}$, тогда $[\,C,[\,C,\,\mathfrak{D}\,]] = C_1 + C_2 + C_3$, где

$$C_1 = [\,\mathcal{A},[\,\mathcal{A},\,\mathfrak{D}\,]] + [\,\hat{f},[\,\tilde{B},\,\mathfrak{D}\,]] + [\,\tilde{B},[\,\hat{f},\,\mathfrak{D}\,]],$$

$$C_2 = [\,\mathcal{A},[\,\hat{f},\,\mathfrak{D}\,]] + [\,\hat{f},[\,\mathcal{A},\,\mathfrak{D}\,]] + [\,\tilde{B},[\,\tilde{B},\,\mathfrak{D}\,]], \tag{3.20}$$

$$C_3 = [\,\mathcal{A},[\,\tilde{B},\,\mathfrak{D}\,]] + [\,\hat{f},[\,\hat{f},\,\mathfrak{D}\,]] + [\,\tilde{B},[\,\mathcal{A},\,\mathfrak{D}\,]].$$

Легко заметить, что $[\,C,[\,C,\,\mathfrak{D}\,]] = 0 \;\; \forall\, \mathfrak{D} \in \mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда $[\,C,[\,C,\,\mathfrak{D}\,]] = 0 \;\; \forall\, \mathfrak{D} \in \mathfrak{J}_{\bar s}$, $\bar s \in \mathbb{F}_3$. Если $\mathfrak{D} \in \mathfrak{J}_{\bar s}$, то $C_1 \in \mathfrak{J}_{\bar s}$, $C_2 \in \mathfrak{J}_{\overline{s+1}}$, $C_3 \in \mathfrak{J}_{\overline{s+2}}$. Отсюда видно, что $(\mathrm{ad}\, C)^2\mathfrak{D} = 0$ тогда и только тогда, когда $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ для всех $\mathfrak{D} \in \mathfrak{J}_{\bar s}$, $\bar s \in \mathbb{F}_3$.

Замечание 3.1. Пусть в разложение (3.19) входит всего лишь одно слагаемое (либо $\mathcal{A}$, либо $\hat{f}$, либо $\tilde{B}$) и $(\mathrm{ad}\, C)^2 = 0$, тогда $C \in C(\mathfrak{J}_{\bar s})$, следовательно, согласно §2, $C \in \mathfrak{E}^*$. Если же в разложение (3.19) входят два ненулевых слагаемых (либо $\mathcal{A} = 0$ либо $\hat{f} = 0$, либо $\tilde{B} = 0$) и при этом $(\mathrm{ad}\, C)^2 = 0$, то из формул (3.20) легко видеть, что каждое из этих слагаемых лежит в $C(\mathfrak{J}_{\bar s})$ для некоторого $\bar s \in \mathbb{F}_3$, откуда в силу §2 $C \in \mathfrak{E}^*$. Таким образом, далее мы полагаем, что в разложении (3.19) элемента $C \in C(\mathfrak{J})$ все слагаемые отличны от нуля.

Лемма 3.2. *Имеют место включения* $\mathfrak{E}^{**} \supseteq \mathfrak{E} \supset \mathfrak{E}^*$.

Доказательство. Включение $\mathfrak{C}^* \subset \mathfrak{C}$ очевидно (см. замечание 2.4), поэтому нам необходимо показать лишь включение $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}^{**}$. Проведем сначала некоторые вычисления. Пусть C имеет вид (3.19) и $C \in C(\mathfrak{J})$. Допустим также, что $\mathfrak{D} = \sum_i g_i \partial_i \in \mathfrak{J}_{\bar{0}}$, тогда из (3.20) и формул (0.13) - (0.18) имеем

$$C_1 = \sum_{j,k} \Big[\sum_i \big\{ a_i a_j \partial_i \partial_j g_k + (a_i(\partial_i a_j)\partial_j g_k - 2a_i(\partial_j a_k)\partial_i g_j) + g_j((\partial_j a_i)\partial_i a_k - a_i \partial_i \partial_j a_k) \big\} + g_j(b_k \partial_j f - f\partial_j b_k) + f(b_j \partial_j g_k + b_k \partial_j g_j) \Big] \partial_k. \qquad (3.21)$$

Положим $\mathfrak{D} = g\,\omega^{-1/3} \in \mathfrak{J}_{\bar{1}}$ в (3.20), тогда

$$C_3 = \sum_{i,j} \Big[g(b_i \partial_i a_j - a_i \partial_i b_j + 2\, b_j \partial_i a_i) - 2\, a_i b_j \partial_i g \Big] \partial_j + 2(fg\,\partial_2 f - f^2\,\partial_2 g)\partial_1 + 2(f^2\,\partial_1 g - fg\,\partial_1 f)\partial_2. \qquad (3.22)$$

Пусть теперь в (3.20) $\mathfrak{D} = \sum_i g_i \tilde{\partial}_i \in \tilde{W}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{J}_{\bar{2}}$, тогда

$$C_2 = \sum_j \Big[\sum_i (2fa_i \partial_i g_j + g_j a_i \partial_i f - 2g_i f\partial_i a_j + 2g_j f\partial_i a_i) + b_j(b_2 g_1 - b_1 g_2) \Big] \partial_j. \qquad (3.23)$$

Поскольку $C \in C(\mathfrak{J})$, то $C_1 = 0$ для всех $\mathfrak{D} \in W(\mathfrak{F})$. Положив последовательно $g_1 = 1$, $g_2 = 0$ и $g_1 = 0$, $g_2 = 1$ в (3.21), имеем

$$\sum_i \big[(\partial_j a_i)\partial_i a_k - a_i \partial_i \partial_j a_k \big] = f\partial_j b_k - b_k \partial_j f, \qquad (3.24)$$

$1 \leqslant j,k \leqslant 2$. Если $g_1 = x_1$, $g_2 = 0$, то из (3.21) и (3.24)

$$\begin{aligned} a_1\partial_1 a_1 - a_2 \partial_2 a_1 &= 2\, f\, b_1, \\ 2\, a_1 \partial_1 a_2 &= f\, b_2. \end{aligned} \qquad (3.25)$$

Положим $g_1 = x_1^2$, $g_2 = 0$, тогда из (3.21), с учетом (3.24) и

(3.25), получим $a_1^2 = 0$. Если $g_1 = x_2$, $g_2 = 0$, то из (3.21) и (3.24)

$$2\, a_2\partial_1 a_1 - \sum_i a_i\partial_i a_2 = f\, b_2, \qquad\qquad (3.26)$$
$$a_2\partial_1 a_2 = 0.$$

Подставив в (3.21) сначала $g_1 = x_2^2$, $g_2 = 0$ (с учетом (3.24) и (3.26)), а затем $g_1 = x_1x_2$, $g_2 = 0$ (с учетом (3.24), (3.25) и (3.26)), получим $a_2^2 = 0$ и $a_1a_2 = 0$. Таким образом, мы показали, что

$$a_ia_j = 0 \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant 2). \qquad (3.27)$$

Рассуждая анологично, из (3.22) можно получить следующие соотношения

$$a_ib_i = 0, \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2), \qquad\qquad (3.28)$$
$$f^2 = a_1b_2 = -a_2b_1.$$

Наконец, формула (3.23) даст нам соотношения

$$b_1b_1 = -2\, f\, \partial_2 a_1, \qquad\qquad (3.29)$$
$$b_2b_2 = 2\, f\, \partial_1 a_2.$$

Так как коэффициенты a_i удовлетворяют соотношениям (3.27), в частности, $a_i^2 = 0$, то в силу леммы 7.2 главы 0 $v_y(a_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$, т.е. $a_i \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$. Пусть $\alpha = v_y(f)$ и $\beta = \min\{v_y(b_1), v_y(b_2)\}$. Согласно замечанию 3.1, $A \neq 0$, $f \neq 0$ и $B \neq 0$. Легко заметить, что $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 1$. Из соотношений (3.25), (3.28), и (3.29) получаем, что $f\, b_i \in \mathfrak{M}^p$, $f^2 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}+\beta}$, $b_i^2 \in \mathfrak{M}^{\frac{p-1}{2}+\alpha}$, откуда

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geqslant p = 5 \\ 2\,\beta \geqslant \frac{p-1}{2} + \alpha = 2 + \alpha \\ 2\,\alpha \geqslant \frac{p+1}{2} + \beta = 3 + \beta \end{cases}$$

А поскольку $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, то $\alpha \geqslant 3 = \frac{p+1}{2}$ и $\beta \geqslant 3 = \frac{p+1}{2}$, т.е. $f \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$ и $b_i \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$.

Таким образом, мы показали, что $C \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar{1}} \oplus$ $\oplus \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar{2}}$. Покажем теперь, что элемент $\mathcal{A}$ из разложения (3.19) лежит в $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$. Для этого представим многочлен a_i в виде суммы $a_i^0 + a_i^1$, где a_i^0 – форма степени $\frac{p+1}{2}$, а $a_i^1 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$ ($i = \overline{1,2}$). В силу (3.27) $(a_i)^2 = 0$, отсюда $(a_i^0)^2 = 0$, что согласно лемме 7.1 главы 0 означает $a_i^0 = l_i^{\frac{p+1}{2}}$ (l_i – линейные формы в $\mathcal{O}_m$). С другой стороны $a_1 a_2 = 0$, следовательно $a_1^0 a_2^0 = 0$, линейные формы l_1 и l_2 пропорциональны. Пусть $a_i^0 = \tau_i l^{\frac{p+1}{2}}$ ($\tau_i \in K$), тогда, учитывая (0.20), имеем

$$\bar{\mathcal{A}} = \mathrm{pr}_{W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}} \mathcal{A} = l^{\frac{p+1}{2}} \sum_i \tau_i \partial_{i1}.$$

Найдем $\operatorname{div} \bar{\mathcal{A}}$. Из равенств (3.24) и (0.20) следует, что

$$\sum_i \left[(\partial_{j1} a_i^0)(\partial_{i1} a_k^0) - a_i^0\, \partial_{i1} \partial_{j1} a_k^0 \right] \equiv 0 \pmod{\mathfrak{M}^p},$$

то есть

$$\sum_i \left[(\partial_{j1} a_i^0)(\partial_{i1} a_k^0) - a_i^0\, \partial_{i1} \partial_{j1} a_k^0 \right] = 0. \qquad (3.30)$$

С другой стороны, $a_i^0 = \tau_i l^{\frac{p+1}{2}}$, т.е. $a_i^0\, \partial_{j1} a_k^0 = 0$ для всех $i, j, k \in \{1,2\}$, но тогда

$$0 = \sum_i \partial_{j1} (a_i^0\, \partial_{i1} a_k^0) = \sum_i \left[(\partial_{j1} a_i^0)(\partial_{i1} a_k^0) + a_i^0\, \partial_{i1} \partial_{j1} a_k^0 \right]. \qquad (3.31)$$

Из (3.30) и (3.31) получаем, что $\sum_i (\partial_{j1} a_i^0)(\partial_{i1} a_k^0) = 0$, откуда

$$0 = - \sum_i (\partial_{i1} a_k^0)(\partial_{j1} a_i^0) = - \sum_i \left[\partial_{i1} (a_k^0\, \partial_{j1} a_i^0) - a_k^0\, \partial_{i1} \partial_{j1} a_i^0 \right] =$$

$$= a_k^0\, \partial_{j1} \sum_i \partial_{i1} a_i^0 = a_k^0\, \partial_{j1} \operatorname{div} \bar{\mathcal{A}}, \quad (3.32)$$

$1 \leqslant j,k \leqslant 2$. Если $\bar{\mathcal{A}} \neq 0$, то существует $a_k^0 \neq 0$, следовательно из (3.32) имеем

$$\frac{p+1}{2}\, \tau_k l^{\frac{p+1}{2}} \partial_{j1} \left[l^{\frac{p-1}{2}} \sum_i \tau_i \partial_{i1} l \right] = \tau_k l^{p-1} (\partial_{j1} l) \sum_i \tau_i \partial_{i1} l = 0,$$

$\forall\, j = \overline{1,2}$. Но $\tau_k l^{p-1} \neq 0$, поэтому либо $\partial_{j1} l = 0 \ \forall\, j$, либо $\sum_i \tau_i \partial_{i1} l = 0$. Оба эти условия приводят к тому, что

$$\operatorname{div} \bar{\mathcal{A}} = \frac{p+1}{2}\, l^{\frac{p-1}{2}} \sum_i \tau_i \partial_{i1} l = 0.$$

Так как $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} + (\mathcal{A} - \bar{\mathcal{A}})$, где $\bar{\mathcal{A}} \in W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$, $\operatorname{div} \bar{\mathcal{A}} = 0$ и $(\mathcal{A} - \bar{\mathcal{A}}) \in W_{m,\left[\frac{p+1}{2}\right]}$, то, в силу предложения 5.1 главы 0 и теоремы 1.1 главы 2, $\mathcal{A} \in \mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$. Это означает, что $C \in \mathfrak{C}^{**}$.

Итак, мы показали, что $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}^{**}$. Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству теоремы 1.1: $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{**}$. В силу только-что доказанной леммы $\mathfrak{C}^{**} \supseteq \mathfrak{C} \supset \mathfrak{C}^{*}$, поэтому нам достаточно лишь показать, что $l^{\frac{p+1}{2}} \omega^{-1/3} \in \mathfrak{C}$, где l – линейная форма в $\mathcal{O}_m$, содержащая переменные $x_1 = y_{11}$ и $x_2 = y_{21}$. Пусть

$$l = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \sum_{j=1}^{m_1 - 1} \lambda_{1j} x_1^{(p^j)} + \sum_{j=1}^{m_2 - 1} \lambda_{2j} x_2^{(p^j)}$$

– линейная форма в $\mathcal{O}_m$, $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, тогда $\partial_i l = \lambda_i + \overline{\partial_i l}$. Рассмотрим элемент $C = \mathcal{A} + \hat{f} + \tilde{B}$, где $\mathcal{A} = a_1 \partial_1 + a_2 \partial_2$, $\hat{f} = f\, \omega^{-1/3}$, $f = l^{\frac{p+1}{2}}$, $\tilde{B} = b_1 \tilde{\partial}_1 + b_2 \tilde{\partial}_2$, причем

$$a_1 = \frac{l^{\frac{p+1}{2}}}{\lambda_1} \left(1 + \frac{\overline{\partial_2 l}}{\lambda_2} - \frac{\overline{\partial_1 l}}{\lambda_1} \frac{\overline{\partial_2 l}}{\lambda_2} \right),$$

$$a_2 = -\frac{l^{\frac{p+1}{2}}}{\lambda_2}\left(1 + \frac{\overline{\partial_1 l}}{\lambda_1} - \frac{\overline{\partial_1 l}}{\lambda_1}\frac{\overline{\partial_2 l}}{\lambda_2}\right),$$

$$b_1 = \lambda_2 l^{\frac{p+1}{2}}\left(1 - \frac{\overline{\partial_1 l}}{2\lambda_1} - \frac{\overline{\partial_2 l}}{2\lambda_2} - \frac{\overline{\partial_1 l}}{\lambda_1}\frac{\overline{\partial_2 l}}{\lambda_2}\right),$$

$$b_2 = \lambda_1 l^{\frac{p+1}{2}}\left(1 - \frac{\overline{\partial_1 l}}{2\lambda_1} - \frac{\overline{\partial_2 l}}{2\lambda_2} - \frac{\overline{\partial_1 l}}{\lambda_1}\frac{\overline{\partial_2 l}}{\lambda_2}\right).$$

Не трудно проверить (см.[11], приложение), что $(\mathrm{ad}\ \mathcal{C})^2 = 0$, $(\mathrm{ad}\ \mathcal{A})^2 = 0$ и $(\mathrm{ad}\ \tilde{\mathcal{B}})^2 = 0$ в $\mathfrak{J}$, т.е. $l^{\frac{p+1}{2}}\omega^{-1/3} \in \mathfrak{C}$. Теорема доказана.

§ 4. Нормализатор подалгебры $\mathfrak{C}$

Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{C})$ – нормализатор подалгебры $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{J}$. По определению, $\mathcal{N} = \{ \mathfrak{D} \in \mathfrak{J} \mid [\mathfrak{D},\mathfrak{C}] \subset \mathfrak{C} \}$. Пусть $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\bar 0} \oplus \mathcal{N}_{\bar 1} \oplus \mathcal{N}_{\bar 2}$ – индуцированная градуировка в алгебре $\mathcal{N}$. Наша задача найти $\mathcal{N}_{\bar s}$, $\bar s \in \mathbb{F}_3$.

Лемма 4.1. $\mathcal{N}_{\bar 0} = \mathfrak{M}\,\mathfrak{J}_{\bar 0}$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{N}_{\bar 0} \subseteq \mathcal{N}_{W(\mathfrak{F})}(\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F})))$, а $\mathcal{N}_{W(\mathfrak{F})}(\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))) = \mathfrak{M}\,W(\mathfrak{F}) = \mathfrak{M}\,\mathfrak{J}_{\bar 0}$ (см. §6 главы 2). Покажем теперь обратное включение. Пусть $\mathfrak{D} = g_1\partial_1 + g_2\partial_2 \in \mathfrak{M}\,\mathfrak{J}_{\bar 0}$, т.е. $v_y(g_i) \geqslant 1$ $(i = \overline{1,2})$, и $f \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$, тогда

$$[\mathfrak{D}, f\omega^{-1/3}] = (\mathfrak{D}(f) - 2f\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D})\,\omega^{-1/3} = t\,\omega^{-1/3}.$$

Легко проверить, что $t \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}$ (это следует из (0.20) и очевидного свойства $v_y(z_1z_2) \geqslant v_y(z_1) + v_y(z_2)$, $\forall\, z_1, z_2 \in \mathcal{O}_m$), то есть $[\mathfrak{D}, f\omega^{-1/3}] \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}}\mathfrak{J}_{\bar 1} \subset \mathfrak{C}$. Положим теперь $\tilde{\mathcal{B}} = b_1\tilde{\partial}_1 +$

$+ b_2\tilde{\partial}_2 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar{2}}$, т.е. $v_y(b_i) \geqslant \frac{p+1}{2}$ $\forall i$, тогда

$$[\mathfrak{D}, \tilde{B}] = \widetilde{[\mathfrak{D}, B]} + 2(\operatorname{div} \mathfrak{D})\tilde{B}.$$

Так как $\mathfrak{D} \in W_{m,(0)}$, а $B \in W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$, то $[\mathfrak{D}, B] + 2(\operatorname{div} \mathfrak{D})B$ $\in W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$, откуда $[\mathfrak{D}, \tilde{B}] \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar{2}} \subset \mathfrak{C}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}\mathfrak{J}_{\bar{0}} \subseteq \mathcal{N} \cap \mathfrak{J}_{\bar{0}} = \mathcal{N}_{\bar{0}}$, отсюда $\mathcal{N}_{\bar{0}} = \mathfrak{M}\mathfrak{J}_{\bar{0}}$.

Замечание 4.2. $\dim_{\mathcal{K}}\left[\mathfrak{J}_{\bar{0}}/\mathcal{N}_{\bar{0}}\right] = \dim_{\mathcal{K}}\left[W(\mathfrak{F})/\mathfrak{M}W(\mathfrak{F})\right] = 2.$

Лемма 4.3. *Пусть* $\mathfrak{D} = d\,\omega^{-1/3}$, *где* $d \in \mathcal{K}^*$, *тогда* $\mathfrak{D} \notin \mathcal{N}_{\bar{1}}$.

Доказательство. Рассмотрим $\tilde{B} = x_1^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}\tilde{\partial}_1 \in \mathfrak{M}^{\frac{p+1}{2}} \mathfrak{J}_{\bar{2}} \subset \mathfrak{C}$, тогда

$$\mathcal{A} = [\mathfrak{D}, \tilde{B}] = d\, x_1^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}\partial_1 .$$

Но $\mathcal{A} \in W_{m,\left[\frac{p-1}{2}\right]}$ и $\operatorname{div} \mathcal{A} \neq 0$, следовательно, в силу предложения 5.1 главы 0 и теоремы 1.1 главы 2, $\mathcal{A} \notin \mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$, т.е. $\mathcal{A} \notin \mathfrak{C}$, а значит $\mathfrak{D} \notin \mathcal{N} \cap \mathfrak{J}_{\bar{1}} = \mathcal{N}_{\bar{1}}$.

Лемма 4.4. $\mathcal{N}_{\bar{1}} = \mathfrak{M}\mathfrak{J}_{\bar{1}}$.

Доказательство. Из леммы 4.3 имеем включение $\mathcal{N}_{\bar{1}} \subseteq \mathfrak{M}\mathfrak{J}_{\bar{1}}$. Обратное включение непосредственно следует из формул (0.14), (0.16) и (0.17).

Замечание 4.5. $\dim_{\mathcal{K}}\left[\mathfrak{J}_{\bar{1}}/\mathcal{N}_{\bar{1}}\right] = \dim_{\mathcal{K}}\left[\mathcal{O}_m/\mathfrak{M}\right] = 1.$

Лемма 4.6. $\mathcal{N}_{\bar{2}} = \mathfrak{M}\mathfrak{J}_{\bar{2}}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{B} = \lambda_1\tilde{\partial}_1 + \lambda_2\tilde{\partial}_2 \neq 0$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{K}$. Рассмотрим $C = x_1^{\left(\frac{p+1}{2}\right)}\partial_2 \in \mathfrak{C}(W(\mathfrak{F})) \subset \mathfrak{C}$, если $\lambda_1 \neq 0$, или же $C = x_2^{(\frac{p+1}{2})}\partial_1$, если $\lambda_2 \neq 0$, тогда

$$[\,C,\ \tilde{B}\,] = [\,\widetilde{C,\ B}\,] + 2(\operatorname{div} C)\tilde{B} = \begin{cases} -\lambda_1 x_1^{(\frac{p-1}{2})}\tilde{\partial}_2, & \text{если } \lambda_1 \neq 0; \\ -\lambda_2 x_2^{(\frac{p-1}{2})}\tilde{\partial}_1, & \text{если } \lambda_2 \neq 0. \end{cases}$$

Откуда $[\,C,\ \tilde{B}\,] \not\in \mathfrak{C}$ (см. теорему 1.1). Таким образом, имеем включение $\mathcal{N}_{\bar{2}} \subseteq \mathfrak{M}\,\mathfrak{Z}_{\bar{2}}$. Обратное включение является следствием формул (0.15), (0.17) и (0.18).

Замечание 4.7. $\dim_K\left(\mathfrak{Z}_{\bar{2}} / \mathcal{N}_{\bar{2}} \right) = \dim_K\left(W(\mathfrak{F}) / \mathfrak{M}\, W(\mathfrak{F}) \right) = 2.$

Теорема 4.8. $\mathcal{N}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{M}\,\mathfrak{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{M}\,\mathfrak{Z}_{\bar{1}} \oplus \mathfrak{M}\,\mathfrak{Z}_{\bar{2}}$ – *максимальная подалгебра в* $\mathfrak{Z}$.

Доказательство. Из лемм 4.1, 4.4 и 4.6 получаем нужное равенство, а из замечаний 4.2, 4.5 и 4.7 получаем, что $\mathcal{N}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{C})$ – подалгебра в $\mathfrak{Z}$ коразмерности 5, что согласно [46] означает ее максимальность.

Замечание 4.9. Пусть $\mathfrak{Z} = \bigoplus_{i \geqslant -3} \mathfrak{Z}_{[i]}$ – градуировка типа G_2 в $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{L}_0 = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{Z}_{[i]}$, тогда (по теореме 4.8) $\mathfrak{L}_0 = \mathcal{N}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{C})$. Причем $\mathcal{N}_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{C})$ – максимальная подалгебра типа (2,1,2) в $\mathfrak{Z}$ (в обозначениях работы [46]).

Глава 4. О КЛАССЕ НИЛЬПОТЕНТНОСТИ СЭНДВИЧЕВЫХ АЛГЕБР

В главах 2 и 3 мы нашли нильпотентную подалгебру $\mathfrak{C}$ в общих, специальных, гамильтоновых, контактных алгебрах Ли картановского типа и алгебрах Меликяна. Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{C}$ называется *нильпотентной класса нильпотентности* N, если $\mathfrak{C}^N \neq 0$, но $\mathfrak{C}^{N+1} = 0$, где $\mathfrak{C}^1 = \mathfrak{C}$, а $\mathfrak{C}^t = [\, \mathfrak{C}^{t-1}, \mathfrak{C}\,]$. В данной главе мы определим класс нильпотентности алгебры $\mathfrak{C}(L)$ для $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$, $K(\mathfrak{F})$ и $L(m_1,m_2)$. Для вычисления класса нильпотентности фильтрованных алгебр Ли мы будем использовать естественный переход к ассоциированной градуированной алгебре.

§ 1. Класс $\mathfrak{C}$ в общей алгебре Ли при $n \geqslant 2$

Из теоремы 1.1 главы 2 вытекает

Следствие 1.1. *Пусть* $L = W(\mathfrak{F})$, $S(\mathfrak{F},\omega)$, $H(\mathfrak{F},\omega)$, $K(\mathfrak{F})$ *и* N *– класс нильпотентности алгебры* $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(L)$, *тогда* $N \leqslant 2m-1$.

Доказательство. В силу теоремы 1.1 главы 2 и предложения 5.1 главы 0 имеем

$$\mathfrak{C}^{2m} \subset \mathfrak{C}(W_m)^{2m} \subset (W_{m,(\frac{p-1}{2})})^{2m} \subset W_{m,(m(p-1))} = 0.$$

Лемма 1.2. *Пусть* $n \geqslant 2$, *тогда* $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))^{2(m-1)}$ *содержит элемент*

$$\mathfrak{D} = g\big(x_1^{(\frac{p+1}{2})} x_2^{(\frac{p-1}{2})} \partial_1 - x_1^{(\frac{p-1}{2})} x_2^{(\frac{p+1}{2})} \partial_2\big), \qquad (4.1)$$

где

$$g = x_1^{(p^{m_1}-p)} x_2^{(p^{m_2}-p)} \prod_{t=3}^{n} \bar{x}_t .$$

Доказательство. Доказывать это утверждение будем индукцией по n. Но сначала с помощью изоморфизма ϕ (0.19) перейдем от структуры разделенных степеней к "стертой" структуре срезанных многочленов. Итак, нам нужно показать, что $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))^{2(m-1)}$ содержит элемент

$$\mathfrak{D} = g\left(y_{11}^{(\frac{p+1}{2})} y_{21}^{(\frac{p-1}{2})} \partial_{11} - y_{11}^{(\frac{p-1}{2})} y_{21}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_{21}\right), \qquad (4.1')$$

где

$$g = y_{12}^{(p-1)} \ldots y_{1m_1}^{(p-1)} y_{22}^{(p-1)} \ldots y_{2m_2}^{(p-1)} \prod_{i=3}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} y_{ij}^{(p-1)}.$$

Пусть $n = 2$ и $m = m_1 + m_2$. Поскольку $y_{11}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_2, y_{21}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_1$ лежат в $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$, то

$$\mathfrak{D}_0 = [\, y_{11}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_2,\ y_{21}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_1 \,] = y_{11}^{(\frac{p+1}{2})} y_{21}^{(\frac{p-1}{2})} \partial_{11} - y_{11}^{(\frac{p-1}{2})} y_{21}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_{21} \in \mathfrak{C}^2.$$

Рассмотрим следующие последовательности элементов из $\mathfrak{C}$:

$$\mathcal{A}'_{1j} = y_{1j}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_2,$$

$$\mathcal{A}''_{1j} = \mathfrak{D}_{12}(y_{11} y_{21}^{(2)} y_{1j}^{(\frac{p-3}{2})}) = y_{1j}^{(\frac{p-3}{2})} (y_{21}^{(2)} \partial_{21} - y_{11} y_{21} \partial_{11}),$$

при $j \in \{2,3,\ldots,m_1\}$ (определение $\mathfrak{D}_{ij}(a)$ см. в §2 главы 0) и

$$\mathcal{A}'_{2j} = y_{2j}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_1,$$

$$\mathcal{A}''_{2j} = \mathfrak{D}_{12}(y_{11}^{(2)} y_{21} y_{2j}^{(\frac{p-3}{2})}) = y_{2j}^{(\frac{p-3}{2})} (y_{11} y_{21} \partial_{21} - y_{11}^{(2)} \partial_{11}),$$

при $j \in \{2,3,\ldots,m_2\}$. Отсюда легко получить, что

$$[[\, \mathfrak{D}_0, \mathcal{A}'_{12} \,], \mathcal{A}''_{12} \,] = \alpha\, y_{12}^{(p-1)} \mathfrak{D}_0 \in \mathfrak{C}^{2+2},$$

где $\alpha = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p+1}{2} \frac{p+3}{2} \neq 0$. Проделав эту процедуру (m_1-1)

раз, имеем

$$U = [[[\dots[[\mathfrak{D}_0, \mathcal{A}'_{12}], \mathcal{A}''_{12}], \dots], \mathcal{A}'_{1m_1}], \mathcal{A}''_{1m_1}] =$$

$$= \alpha^{m_1-1} y_{12}^{(p-1)} \dots y_{1m_1}^{(p-1)} \mathfrak{D}_0 \in \mathfrak{E}^{2+2(m_1-1)}.$$

Далее аналогично получаем

$$\mathfrak{D} = [[[\dots[[U, \mathcal{A}'_{22}], \mathcal{A}''_{22}], \dots], \mathcal{A}'_{2m_2}], \mathcal{A}''_{2m_2}] =$$

$$= \tilde{\alpha}\, y_{12}^{(p-1)} \dots y_{1m_1}^{(p-1)} y_{22}^{(p-1)} \dots y_{2m_2}^{(p-1)} \mathfrak{D}_0.$$

Заметим, что элемент $\mathfrak{D} \in \mathfrak{E}^{2+2(m_1-1)+2(m_2-1)} = \mathfrak{E}^{2(m-1)}$ и имеет требуемый вид.

Пусть теперь $n > 2$ и допустим, что наше утверждение справедливо для $n - 1$. Обозначим через $\mathfrak{F}'$ - флаг, соответствующий набору $\{m_1, \dots, m_{n-1}\}$, тогда $W(\mathfrak{F}') \subset W(\mathfrak{F})$ и в силу предложения 5.2 главы 0 $\mathfrak{E}(W(\mathfrak{F}')) \subset \mathfrak{E} = \mathfrak{E}(W(\mathfrak{F}))$. По предположению индукции в $\mathfrak{E}(W(\mathfrak{F}'))^{2(m-1)-2m_n} \subset \mathfrak{E}^{2(m-1)-2m_n}$ найдется элемент $\mathfrak{D} = g\,\mathfrak{D}_0$, где

$$g = y_{12}^{(p-1)} \dots y_{1m_1}^{(p-1)} y_{22}^{(p-1)} \dots y_{2m_2}^{(p-1)} \prod_{i=3}^{n-1} \prod_{j=1}^{m_i} y_{ij}^{(p-1)}.$$

Тогда, также как и в случае $n = 2$ рассмотрим две последовательности элементов из $\mathfrak{E}$:

$$\mathcal{B}'_j = y_{nj}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_2,$$

$$\mathcal{B}''_j = y_{nj}^{(\frac{p-3}{2})} (y_{21}^{(2)} \partial_{21} - y_{11} y_{21} \partial_{11}),$$

при $j \in \{1, 2, \dots, m_n\}$. Отсюда получаем искомый элемент

$$[[[\dots[[\mathfrak{D}, \mathcal{B}'_1], \mathcal{B}''_1], \dots], \mathcal{B}'_{m_n}], \mathcal{B}''_{m_n}] =$$

$$= \beta\, y_{n1}^{(p-1)} \dots y_{nm_n}^{(p-1)} g\, \mathfrak{D}_0 \in \mathfrak{E}^{2(m-1)}.$$

Следствие 1.3. *Если* $n \geqslant 2$ *и* N *– класс нильпотентности алгебры* $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$, *то* $N \geqslant 2m - 2$.

Предложение 1.4. *Пусть* $n \geqslant 2$ *и* N *– класс нильпотентности алгебры* $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))$, *тогда* $N = 2m - 1$.

Доказательство. В силу следствий 1.1 и 1.3 имеем неравенство : $2m - 2 \leqslant N \leqslant 2m - 1$. Покажем, что $\mathfrak{C}^{2m-1} \neq 0$. Согласно лемме 1.2 в $\mathfrak{C}^{2m-2}$ есть элемент $\mathfrak{D}$ вида (4.1'). Рассмотрим дифференцирование

$$U = x_1^{(\frac{p+1}{2})} x_2 \partial_1 = y_{11}^{(\frac{p+1}{2})} y_{21} \partial_{11} \in \mathfrak{C},$$

тогда элемент

$$[\,\mathfrak{D}, U\,] = g\,[\,\mathfrak{D}_0, U\,] = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{p+3}{2}\, g\, y_{11}^{(p-1)} y_{21}^{(\frac{p+3}{2})} \partial_{21}$$

лежит в $\mathfrak{C}^{2m-1}$.

§ 2. Класс $\mathfrak{C}$ в алгебре Цассенхауза

Пусть $n = 1$, $m = m_1$ и $W(m) = W(\mathfrak{F})$ – алгебра Цассенхауза. В данном параграфе для удобства мы избавимся от лишних индексов в обозначениях (0.19) и (0.20), а именно : пусть $x = x_1$, $y_1 = x$, $y_2 = x^{(p)}, \ldots, y_m = x^{(p^{m-1})}$ и

$$\partial = \partial_1 - y_1^{p-1}\partial_2 + \ldots + (-1)^{m-1} y_1^{p-1} \ldots y_m^{p-1} \partial_m, \tag{4.2}$$

где $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$; $\mathcal{O}_m = K[y_1, \ldots, y_m]/(y_1^p, \ldots, y_m^p)$ и $W_m = \operatorname{Der} \mathcal{O}_m$.

Из предложения 5.1 главы 0 и теоремы 1.1 главы 2 следует, что

$$\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F})) = \left(\mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}} + \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}\right) W(m),$$

где $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал в $\mathcal{O}_m$, а $\mathfrak{N}$ – максимальный идеал в $\mathcal{O}_{m-1}$ ($\mathcal{O}_{m-1}$ – подкольцо в $\mathcal{O}_m$, не содержащее переменной y_1), т.е. $\mathfrak{N} = \langle x^{(\alpha)} \mid (\alpha) \neq (0)$ и $p|\alpha \rangle$. Поскольку при коммутировании элементов из $\mathfrak{C}(W(m))$ степени коэффициентов будут постоянно возрастать, поэтому для определения класса нильпотентности алгебры $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(W(m))$ необходимо коммутировать между собой элементы, коэффициенты которых имеют минимально возможный порядок. Легко заметить, что минимально возможный порядок равен $\frac{p+1}{2}$ (а максимальный порядок имеет многочлен $y_1^{p-1}\ldots y_m^{p-1}$), поэтому при коммутировании мы будем использовать в основном элементы вида $f\partial$, где f – однородная форма из $\mathfrak{N}$ степени $\frac{p+1}{2}$.

Замечание 2.1. Если g и f – однородные формы из $\mathfrak{N}$ степени α и $\frac{p+1}{2}$ соответственно, тогда коэффициент $h = g\partial f - f\partial g$ элемента $[\, g\partial,\, f\partial \,]$ будет иметь порядок $v_y(h) \geqslant \alpha + \frac{p+1}{2} + p - 2$, следовательно коммутировать элемент $g\partial$ с элементом $f\partial$ не эффективно (т.к. степень быстро растет), в этом случае мы будем использовать элемент $y_1^{(\frac{p+3}{2})}\partial = y_1^{(\frac{p+3}{2})}\partial_1$, тогда $h\partial_1 = [\, g\partial,\, y_1^{(\frac{p+3}{2})}\partial_1 \,] = y_1^{(\frac{p+1}{2})} g\partial_1$, т.е. $v_y(h) = \alpha + \frac{p+1}{2}$.

Предложение 2.2. *Пусть q и r – соответственно частное и остаток от деления числа $(m-1)(p-1)$ на $\frac{p+1}{2}$, q_1 и r_1 – частное и остаток от деления числа $q - \frac{p+3}{2}$ на $\frac{p+1}{2}$, тогда класс нильпотентности алгебры $\mathfrak{C}(W(m))$ равен*

$$N = \begin{cases} q+1, \text{ если } q < \frac{p+3}{2} \text{ и } \quad r+q < 3; \\ q+2, \text{ если } q < \frac{p+3}{2} \text{ и } \quad 3 \leqslant r+q < \frac{p+7}{2}; \\ q+3, \text{ если } q < \frac{p+3}{2} \text{ и } \quad \frac{p+7}{2} \leqslant r+q; \\ q+q_1+2, \text{ если } q \geqslant \frac{p+3}{2} \text{ и } \quad r+r_1 < 2; \\ q+q_1+3, \text{ если } q \geqslant \frac{p+3}{2} \text{ и } \quad 2 \leqslant r+r_1 < \frac{p+5}{2}; \\ q+q_1+4, \text{ если } q \geqslant \frac{p+3}{2} \text{ и } \quad \frac{p+5}{2} \leqslant r+r_1. \end{cases}$$

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathfrak{C}^N \neq 0$. Рассмотрим элемент

$$y_2 \ldots y_m y_2 \ldots y_m \ldots y_2 \ldots y_m = \prod_{i=1}^{p-1} (y_2 \ldots y_m). \qquad (4.3)$$

Этот элемент содержит $(m-1)(p-1)$ сомножителей. Пусть q и r –частное и остаток от деления числа $(m-1)(p-1)$ на $\frac{p+1}{2}$, т.е.

$$(m-1)(p-1) = \frac{p+1}{2} q + r, \qquad 0 \leqslant r \leqslant \frac{p-1}{2}.$$

Обозначим через a_1 – произведение первых $\frac{p+1}{2}$ членов элемента (4.3), через a_2 – произведение следующих $\frac{p+1}{2}$ членов и т.д., последним мономом будет a_q, а оставшееся произведение из последних r членов обозначим через a_r. Положим также $\bar{a}_r = a_r/y_m$ (если $r > 0$), т.е. $a_r = \bar{a}_r y_m$. Таким образом, мы получили последовательность мономов $a_1,\ldots,a_q$ порядка $\frac{p+1}{2}$, моном a_r порядка $r < \frac{p+1}{2}$ и моном $\bar{a}_r$ порядка $r-1$. Рассмотрим два случая.

1) $q < \frac{p+3}{2}$, тогда элемент

$$\mathfrak{D} = [a_q\partial,\ldots[a_2\partial,[a_1\partial,\ y_1^{(\frac{p+3}{2})}\partial_1]]\ldots] = y_1^{(\frac{p+3}{2}-q)} a_1\ldots a_q\partial_1$$

лежит в $\mathfrak{C}^{q+1}$, т.е. $\mathfrak{C}^{q+1} \neq 0$. Если $r+q \geqslant 3$, то $\frac{p-5}{2} + r + q \geqslant \frac{p+1}{2}$, тогда элемент

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{cases} [y_1^{(\frac{p+3}{2}-r)} a_r\partial_1, \mathfrak{D}] = a_1 y_1^{(p+2-r-q)} a_1\ldots a_q a_r \partial_1, \text{ при } r \neq q; \\ [y_1^{(\frac{p+5}{2}-r)} \bar{a}_r\partial_1, \mathfrak{D}] = a_2 y_1^{(p+3-r-q)} a_1\ldots a_q \bar{a}_r \partial_1, \text{ при } r = q; \end{cases}$$

(где $\alpha_1, \alpha_2 \in K$) отличен от нуля и лежит в $\mathfrak{C}^{q+2}$. Если же $r + q \geqslant \frac{p+7}{2}$, то $\frac{p-5}{2} + r + q \geqslant \frac{p+1}{2} + \frac{p+1}{2}$, откуда элемент

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{cases} [y_1^{(\frac{p+3}{2})} \partial_1, \mathfrak{D}_1] = \beta_1 y_1^{(p+2+\frac{p+1}{2}-r-q)} a_1 \ldots a_q a_r \partial_1, \text{при } r \neq q; \\ [y_1^{(\frac{p+1}{2})} y_m \partial_1, \mathfrak{D}_1] = \beta_2 y_1^{(p+2+\frac{p+1}{2}-r-q)} a_1 \ldots a_q a_r \partial_1, \text{при } r = q; \end{cases}$$

отличен от нуля (поскольку в нашем случае $\frac{p+7}{2} \leqslant r + q \leqslant p$) и лежит в $\mathfrak{C}^{q+3}$.

2) $q \geqslant \frac{p+3}{2}$. Пусть q_1 и r_1 – частное и остаток от деления числа $q - \frac{p+3}{2}$ на $\frac{p+1}{2}$, т.е.

$$q - \frac{p+3}{2} = \frac{p+1}{2} q_1 + r_1, \qquad 0 \leqslant r_1 \leqslant \frac{p-1}{2}.$$

Положим также, что $B = y_1^{(\frac{p+3}{2})} \partial_1$ и $A_i = a_i \partial$. Тогда

$$C = [B, [A_{\frac{p+3}{2}}, \ldots [A_2, [A_1, B]] \ldots]] = -y_1^{(\frac{p+1}{2})} a_1 \ldots a_{\frac{p+3}{2}} \partial_1 \in \mathfrak{C}^{2+\frac{p+3}{2}}.$$

Отсюда получаем, что

$$\mathfrak{D} = \left[\prod_{i=0}^{r_1-1} \operatorname{ad} A_{q-i}\right] \prod_{t=0}^{q_1-1} \left[\operatorname{ad} B \prod_{s=0}^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{ad} A_{\frac{p+3}{2}+\frac{p+1}{2}(q_1-t)-s}\right] (C) =$$

$$= \underbrace{\operatorname{ad} A_q \ldots \operatorname{ad} A_{\frac{p+3}{2}+\frac{p+1}{2}q_1+1}}_{r_1 - \text{раз}} \overbrace{(\operatorname{ad} B\, \underbrace{\operatorname{ad} A_{\frac{p+3}{2}+\frac{p+1}{2}q_1} \ldots \operatorname{ad} A_{\frac{p+3}{2}+\frac{p+1}{2}(q_1-1)+1}}_{\frac{p+1}{2} - \text{раз}}) \ldots (\operatorname{ad} B\, \underbrace{\operatorname{ad} A_{\frac{p+3}{2}+\frac{p+1}{2}} \ldots \operatorname{ad} A_{\frac{p+3}{2}+1}}_{\frac{p+1}{2} - \text{раз}})}^{q_1 - \text{раз}} (C) =$$

$$= \pm\, y_1^{(\frac{p+1}{2}-r_1)} a_1 \ldots a_q \partial \in \mathfrak{C}^{2+\frac{p+3}{2}+q_1\frac{p+1}{2}+r_1+q_1} = \mathfrak{C}^{q+q_1+2},$$

т.е. $\mathfrak{C}^{q+q_1+2} \neq 0$. Далее рассуждения аналогичны случаю 1).

А именно, если $r + r_1 \geqslant 2$, то $\frac{p-3}{2} + r + r_1 \geqslant \frac{p+1}{2}$, откуда элемент

$$\mathfrak{D}_1 = \begin{cases} [y_1^{(\frac{p+3}{2}-r)} a_r \partial_1, \mathfrak{D}] = \alpha_1' y_1^{(p+1-r-r_1)} a_1 \ldots a_q a_r \partial_1, & \text{при } r \neq r_1+1; \\ [y_1^{(\frac{p+5}{2}-r)} \bar{a}_r \partial_1, \mathfrak{D}] = \alpha_2' y_1^{(p+2-r-r_1)} a_1 \ldots a_q \bar{a}_r \partial_1, & \text{при } r = r_1+1; \end{cases}$$

отличен от нуля и лежит в $\mathfrak{C}^{q+q_1+3}$, если же $r + r_1 \geqslant \frac{p+5}{2}$, то $\frac{p-3}{2} + r + r_1 \geqslant \frac{p+1}{2} + \frac{p+1}{2}$, откуда имеем

$$\mathfrak{D}_2 = \begin{cases} [y_1^{(\frac{p+3}{2})} \partial_1, \mathfrak{D}_1] = \beta_1' y_1^{(p+1+\frac{p+1}{2}-r-r_1)} a_1 \ldots a_q a_r \partial_1, & \text{при } r \neq r_1+1; \\ [y_1^{(\frac{p+1}{2})} y_m \partial_1, \mathfrak{D}_1] = \beta_2' y_1^{(p+1+\frac{p+1}{2}-r-r_1)} a_1 \ldots a_q a_r \partial_1, & \text{при } r = r_1+1; \end{cases}$$

причем $\mathfrak{D}_2 \neq 0$ (поскольку $\frac{p+5}{2} \leqslant r + r_1 \leqslant p - 1$) и $\mathfrak{D}_2 \in \mathfrak{C}^{q+q_1+4}$.

Итак, мы показали, что $\mathfrak{C}^N \neq 0$. Покажем теперь, что $\mathfrak{C}^{N+1} = 0$. Заметим, что в $\mathfrak{C}^N$ нет дифференцирований, порядки коэффициентов которых были бы меньше чем у $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ соответственно. В самом деле, меньший порядок мог бы получиться если бы мы (хотя бы в одном месте) вместо $y_1^{(\frac{p+3}{2})}$, $y_1^{(\frac{p+3}{2}-r)} a_r$, $y_1^{(\frac{p+5}{2}-r)} \bar{a}_r$ или $y_1^{(\frac{p+1}{2})} y_m$ – многочленов порядка $\frac{p+3}{2}$ – взяли бы многочлен порядка $\frac{p+1}{2}$ (т.е. форма младшей степени которого лежит в $\mathfrak{N}^{\frac{p+1}{2}}$). А из замечания 2.1 следует, что порядок коэффициента при каждой такой замене возрастает не менее чем на $p - 3$ (относительно исходного порядка, даже с учетом того, что по y_1 можно дифференцировать $p - 1$ раз, а не $\frac{p+1}{2}$ раз). С другой стороны, нетрудно видеть, что порядок выбран таким образом, что при умножении на любой элемент из $\mathfrak{C}$ получаем 0, т.е. $\mathfrak{C}^{N+1} = 0$.

Замечание 2.3. Нетрудно убедиться, что случай $r + q < 3$ возможен лишь при $p = 5$ и $m = 2$.

§ 3. Класс $\mathfrak{C}$ в специальной алгебре Ли

Пусть $n \geqslant 3$ и $S(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F},\omega_0)$, где ω_0 - стандартная форма объёма (см. §2 главы 0).

Замечание 3.1. Поскольку все дифференцирования, рассматривавшиеся в доказательстве леммы 1.2 имеют нулевую дивергенцию, то можно считать, что лемма 1.2 выполнена и для алгебры $S(\mathfrak{F})$.

Лемма 3.2. *Класс нильпотентности алгебры* $\mathfrak{C}(S(\mathfrak{F}))$ *равен* $2m - 1$.

Доказательство. В силу замечания 3.1 в $\mathfrak{C}^{2m-2}$ есть элемент $\mathfrak{D} = g\,\mathfrak{D}_0$ вида (4.1'). Рассмотрим дифференцирование

$$U = x_1^{(\frac{p-1}{2})} x_2 \partial_3 = y_{11}^{(\frac{p-1}{2})} y_{21} \partial_3 \in \mathfrak{C},$$

тогда

$$[\,\mathfrak{D}, U\,] = (-1)^{\frac{p+1}{2}} \frac{p+3}{2} y_{11}^{(p-1)} (g y_{21}^{(\frac{p+1}{2})} \partial_{31} - (\partial_{31} g) y_{21}^{(\frac{p+3}{2})} \partial_{21})$$

лежит в $\mathfrak{C}^{2m-1}$. Отсюда и из следствия 1.1 получаем наше утверждение.

Рассмотрим теперь общий случай $S(\mathfrak{F},\omega)$. В силу теоремы 1.2 главы 1, алгебра $S(\mathfrak{F},\omega)$ натянута на дифференцирования

$$\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a) = \mathfrak{D}_{ij}(a) + a\,\varphi^{-1}\mathfrak{D}_{ij}(\varphi),$$

где $a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F})$ и $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Легко заметить, что все дифференцирования, участвующие в доказательствах лемм 1.2 и 3.2 имеют вид $\mathfrak{D}_{ij}(a)$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$. Согласно следствию 3.1 главы 2, дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$ (при техже многочленах a) лежат в $\mathfrak{C}(S(\mathfrak{F},\omega))$. Поэтому, если мы повторим доказательства лемм

1.2 и 3.2, заменив при этом $\mathfrak{D}_{ij}(a)$ на $\bar{\mathfrak{D}}_{ij}(a)$, то получим

Предложение 3.3. *Класс нильпотентности сэндвичевой подалгебры $\mathfrak{C}$ в специальной алгебре Ли* $S(\mathfrak{F},\omega)$ *равен* $2m-1$.

§ 4. Класс $\mathfrak{C}$ в гамильтоновой алгебре Ли

Пусть $n = 2n'$ и $H(\mathfrak{F}) = H(\mathfrak{F},\omega_0)$, где ω_0 – стандартная гамильтонова форма (см. §3 главы 0). Согласно предложению 3.1 главы 0, алгебра $H(\mathfrak{F})$ содержит элементы вида

$$\mathfrak{D}_a = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_{\tilde{i}}a\, \partial_i - \partial_i a\, \partial_{\tilde{i}}), \qquad a \in \mathcal{O}(\mathfrak{F}).$$

Лемма 4.1. $\mathfrak{C}(H(\mathfrak{F}))^{2m-1-n'}$ *содержит ненулевой элемент* $\mathfrak{D}_a$, *где*

$$a = x_1^{(p^{m_1}-\frac{p-1}{2})} x_{\tilde{1}}^{(p^{m_{\tilde{1}}}-\frac{p-1}{2})} \prod_{i=2}^{n'} \bar{x}_i x_{\tilde{i}}^{(p^{m_{\tilde{i}}}-\frac{p+1}{2})}. \qquad (4.4)$$

Доказательство. Доказывать это утверждение будем индукцией по n'. Но сначала заметим, что моном (4.4) пропорционален следующему моному из $\mathcal{O}_m$:

$$a = y_{11}^{(\frac{p+1}{2})} y_{12}^{(p-1)} \dots y_{1m_1}^{(p-1)} y_{\tilde{1}1}^{(\frac{p+1}{2})} y_{\tilde{1}2}^{(p-1)} \dots y_{\tilde{1}m_{\tilde{1}}}^{(p-1)} \times$$

$$\times \prod_{i=2}^{n'} \left[\prod_{j=1}^{m_i} y_{ij}^{(p-1)} y_{\tilde{i}1}^{(\frac{p-1}{2})} \prod_{t=2}^{m_{\tilde{i}}} y_{\tilde{i}t}^{(p-1)} \right]. \qquad (4.4')$$

В силу предложения 3.2 главы 0, $[\mathfrak{D}_a, \mathfrak{D}_b] = \mathfrak{D}_c$, где $c = \{a,b\}$ вычисляется по формуле (0.7), поэтому нам удобнее будет работать не с дифференцированиями $\mathfrak{D}_a$ и $\mathfrak{D}_b$, а с многочленами a и b.

Если $n' = 1$ (т.е. $n = 2$), то $H(\mathfrak{F}) = S(\mathfrak{F})$, следовательно в этом случае утверждение имеет место.

Пусть теперь $n' > 1$ и наше утверждение справедливо для $n' - 1$. Обозначим через $\mathfrak{F}'$ - флаг, соответствующий набору $\{m_1, \ldots, m_{n'-1}, m_{\tilde{1}}, \ldots, m_{\widetilde{n'-1}}\}$, т.е. в E' нет неизвестных $x_{n'}$ и $x_n = x_{\tilde{n}'}$, тогда $H(\mathfrak{F}') \subset H(\mathfrak{F})$ и, согласно следствию 4.1 главы 2, $\mathfrak{C}(H(\mathfrak{F}')) \subset \mathfrak{C}(H(\mathfrak{F}))$. По предположению индукции в $\mathfrak{C}(H(\mathfrak{F}'))^{2(m-m_{n'}-m_n)-1-(n'-1)} \subset \mathfrak{C}(H(\mathfrak{F}))^{2(m-m_{n'}-m_n)-n'}$ есть элемент $\mathfrak{D}_g$, где

$$g = y_{11}^{(\frac{p+1}{2})} y_{12}^{(p-1)} \ldots y_{1m_1}^{(p-1)} y_{\tilde{1}1}^{(\frac{p+1}{2})} y_{\tilde{1}2}^{(p-1)} \ldots y_{\tilde{1}m_{\tilde{1}}}^{(p-1)} \times$$

$$\times \prod_{i=2}^{n'-1} \left[\prod_{j=1}^{m_i} y_{ij}^{(p-1)} y_{\tilde{i}1}^{(\frac{p-1}{2})} \prod_{t=2}^{m_{\tilde{i}}} y_{\tilde{i}t}^{(p-1)} \right].$$

Рассмотрим следующие последовательности многочленов из $\mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$:

$$a_j' = y_{n'j}^{(\frac{p+1}{2})} y_{11}, \qquad a_j'' = y_{n'j}^{(\frac{p-3}{2})} y_{11} y_{\tilde{1}1}^{(2)}, \qquad 1 \leq j \leq m_{n'},$$

$$b_t' = y_{\tilde{n}'t}^{(\frac{p+1}{2})} y_{11}, \qquad b_t'' = y_{\tilde{n}'t}^{(\frac{p-3}{2})} y_{11} y_{\tilde{1}1}^{(2)}, \qquad 2 \leq t \leq m_{\tilde{n}'}.$$

Согласно следствию 4.1 главы 2 $\mathfrak{D}_{a_j'}, \mathfrak{D}_{a_j''}, \mathfrak{D}_{b_t'}, \mathfrak{D}_{b_t''} \in \mathfrak{C} = \mathfrak{C}(H(\mathfrak{F}))$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\{\{g, a_1'\}, a_1''\} = \alpha\, g\, y_{n'1}^{(p-1)},$$

где $\alpha = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p+1}{2} \frac{p+3}{4} \neq 0$. Проделав это $m_{n'}$ раз, имеем

$$h = \{\{\{\ldots\{\{g, a_1'\}, a_1''\}, \ldots\}, a_{m_{n'}}'\}, a_{m_{n'}}''\} = \alpha^{m_{n'}} g y_{n'1}^{(p-1)} \ldots y_{n'm_{n'}}^{(p-1)}.$$

Далее вычислим

$$f = \{h, y_{\tilde{n}'1}^{(\frac{p+1}{2})} y_{n'1}\} = \alpha^{m_{n'}} g y_{n'1}^{(p-1)} \ldots y_{n'm_{n'}}^{(p-1)} y_{\tilde{n}'1}^{(\frac{p-1}{2})}.$$

Отсюда, с учетом (0.20), получаем

$$a = \{\{\{\ldots\{\{f,b_2'\},b_2''\},\ldots\},b'_{m_{\tilde n'}}\},b''_{m_{\tilde n'}}\} =$$

$$= \beta g \prod_{j=1}^{m_{n'}} y_{n',j}^{(p-1)} y_{\tilde n' 1}^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \prod_{t=2}^{m_{\tilde n'}} y_{\tilde n' t}^{(p-1)},$$

где $\beta = \alpha^{m_{\tilde n'}+m_{n'}-1}$ и $\mathfrak{D}_a \in \mathfrak{C}^{2m-1-n'}$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. $\mathfrak{C}(\mathrm{H}(\mathfrak{F}))^{2m-2}$ *содержит элемент* $\mathfrak{D}_a$, *где*

$$a = x_1^{\left(p^{m_1}-\frac{p-3}{2}\right)} x_{\tilde 1}^{\left(p^{m_{\tilde 1}}-\frac{p-1}{2}\right)} \left[\prod_{i=2}^{n'-1} \bar x_i \bar x_{\tilde i}\right] x_{n'}^{\left(p^{m_{n'}}-2\right)} \bar x_{\tilde n'} . \qquad (4.5)$$

Доказательство. Заметим, что в формулировке леммы предполагается $n' > 1$, т.к. при $n' = 1$ в $\mathfrak{C}^{2m-2}$ (в силу леммы 4.1) содержится элемент $\mathfrak{D}_a$, где a – многочлен (4.4). Согласно лемме 4.1, в $\mathfrak{C}^{2m-1-n'}$ есть элемент $\mathfrak{D}_g$, где g – моном вида (4.4). Непосредственные вычисления показывают, что многочлен

$$a = \{\ldots\{\{g,x_{\tilde 2}^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} x_1\},x_{\tilde 3}^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} x_2\},\ldots,x_{\tilde n'}^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} x_{n'-1}\}$$

имеет вид (4.5) (с точностью до коэффициента из K) и $\mathfrak{D}_a$ лежит в $\mathfrak{C}^{2m-2}$.

Следствие 4.3. *Класс нильпотентности алгебры* $\mathfrak{C}(\mathrm{H}(\mathfrak{F}))$ *удовлетворяет неравенству* $2m-2 \leqslant N \leqslant 2m-1$.

Лемма 4.4. *Пусть* N – *класс нильпотентности алгебры* $\mathfrak{C}(\mathrm{H}(\mathfrak{F}))$, *тогда*

$$N = \begin{cases} 2m-1, & \text{если } p > 5; \\ 2m-2, & \text{если } p = 5. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Пусть $p > 5$. В силу леммы 4.2, в $\mathfrak{C}^{2m-2}$ есть ненулевой элемент $\mathfrak{D}_a$, где многочлен a имеет вид (4.5). Тогда многочлен

$$g = \{a, x_{\tilde{1}}^{(\frac{p-1}{2})} x_1 x_{n'}\} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p-5}{2} x_1^{(p^{m_1} - \frac{p-3}{2})} \bar{x}_{\tilde{1}} \prod_{i=2}^{n'} \bar{x}_i \bar{x}_{\tilde{i}}$$

отличен от нуля и $\mathfrak{D}_g \in \mathfrak{C}^{2m-1}$, т.е. $\mathfrak{C}^{2m-1} \neq 0$. Отсюда и следствия 1.1 получаем, что $N = 2m - 1$.

2) Пусть $p = 5$. По лемме 4.2 $\mathfrak{C}^{2m-2} \neq 0$. Покажем, что $\mathfrak{C}^{2m-1} = 0$. В самом деле, если $\mathfrak{C}^{2m-1} \neq 0$, то в силу предложения 5.1 главы 0 и теоремы 1.1 главы 2

$$\mathfrak{C}^{2m-1} \subset \mathfrak{C}(W_m)^{2m-1} \subset (W_{m,(\frac{p-1}{2})})^{2m-1} \subset W_{m,(m(p-1)-\frac{p-1}{2})} = W_{m,(4m-2)},$$

т.е. у ненулевого элемента $\mathfrak{D}_a$ из $\mathfrak{C}^{2m-1}$ коэффициенты имеют порядок $4m - 1$, а это возможно лишь при $a = e_{\mathfrak{F}} = \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$. С другой стороны, согласно предложению 3.2 главы 0, $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}}$ не лежит в $H(\mathfrak{F})$, а значит $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \notin \mathfrak{C}^{2m-1}$, откуда $\mathfrak{C}^{2m-1} = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь общий случай $H(\mathfrak{F}, \omega)$. Из теорем 5.1 и 6.10 главы 1 получаем, что алгебра $H(\mathfrak{F}, \omega)$ натянута на дифференцирования

$$\bar{\mathfrak{D}}_a = \mathfrak{D}_a + \mathfrak{D}_{\omega,a}, \qquad a \in B(\mathfrak{F}),$$

где $\mathfrak{D}_a$ - образующие $H(\mathfrak{F})$, а $\mathfrak{D}_{\omega,a}$ - дифференцирования, коэффициенты которого имеют порядок строго больший чем порядок коэффициентов дифференцирования $\mathfrak{D}_a$. Поскольку все дифференцирования, участвующие в доказательствах лемм 4.1, 4.2 и 4.4 имеют вид $\mathfrak{D}_a$, где $a \in \mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$, то, в силу следствия 4.1 главы 2, дифференцирования $\bar{\mathfrak{D}}_a$ (при тех же многочленах a) лежат в $\mathfrak{C}(H(\mathfrak{F}, \omega))$. Поэтому, заменив $\mathfrak{D}_a$ на $\bar{\mathfrak{D}}_a$ в доказательствах лемм 4.1, 4.2 и 4.4, получим

Предложение 4.5. *Пусть* $p > 5$, *тогда класс нильпотент-*

ности сэндвичевой подалгебры $\mathfrak{C}$ *в гамильтоновой алгебре Ли* $H(\mathfrak{F},\omega)$ *равен* $2m-1$.

Замечание 4.6. Случай $p = 5$, рассмотренный для $H(\mathfrak{F})$ в лемме 4.4, в общей ситуации осложняется тем, что для некоторых форм ω элемент $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \in H(\mathfrak{F},\omega)$. Поэтому, в этом случае согласно следствию 4.3 $N = 2m-2$ или $N = 2m-1$.

§ 5. Класс $\mathfrak{C}$ в контактной алгебре Ли

Пусть $n = 2n'+1$ и $K(\mathfrak{F})$ - контактная алгебра Ли картановского типа. По предложению 4.1 главы 0, алгебра $K(\mathfrak{F})$ натянута на элементы $\mathfrak{D}_a$ вида (0.10), где $a \in B(\mathfrak{F})$. Также как и в §4 мы будем работать с многочленами, коммутатор которых $c = [a,b]$ определяется формулой (0.11). Заметим только, что если многочлены a и b не зависят от переменной x_n, то $[a,b] = \{a,b\}$ (здесь $\{a,b\}$ - обычная скобка Пуассона), поэтому, повторив в точности доказательства лемм 4.1 и 4.2, получим

Лемма 5.1. *Элемент* $\mathfrak{D}_a$, *где многочлен* a *имеет вид* (4.5), *лежит в* $\mathfrak{C}(K(\mathfrak{F}))^{2m-2m_n-2}$.

Лемма 5.2. $\mathfrak{C}(K(\mathfrak{F}))^{2m-2} \neq 0$.

Доказательство. Согласно лемме 5.1, в $\mathfrak{C}(K(\mathfrak{F}))^{2m-2m_n-2}$ найдется элемент $\mathfrak{D}_a$, где

$$a = y_{11}^{(\frac{p+3}{2})} y_{\tilde{1}1}^{(\frac{p+1}{2})} \left[\prod_{i=2}^{n'-1} y_{i1}^{(p-1)} y_{\tilde{i}1}^{(p-1)}\right] y_{n'1}^{(p-2)} y_{\tilde{n}'1}^{(p-1)} \times$$

$$\times \left[\prod_{i=1}^{n'} \prod_{j=2}^{m_i} \prod_{t=2}^{m_{\tilde{i}}} y_{ij}^{(p-1)} y_{\tilde{i}t}^{(p-1)}\right].$$

Рассмотрим следующие последовательности многочленов из $\mathfrak{M}^{\frac{p+3}{2}}$:

$$a_j' = y_{nj}^{(\frac{p+1}{2})} y_{\tilde{1}1}, \qquad a_j'' = y_{nj}^{(\frac{p-3}{2})} y_{\tilde{1}1} y_{11}^{(2)}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m_n.$$

В §5 главы 2 показано, что $\mathfrak{D}_{a_j'}, \mathfrak{D}_{a_j''} \in \mathfrak{C} = \mathfrak{C}(K(\mathfrak{F}))$. Вычислим

$$[\,a,\ a_1'] = (2n'-1)a\, y_{\tilde{1}1} y_{n1}^{(\frac{p-1}{2})} - (\partial_{11}a) y_{n1}^{(\frac{p+1}{2})}.$$

Обозначим через s порядок $v_y(a)+1$. Тогда

$$[\,a,\ a_1'] \equiv -(\partial_{11}a) y_{n1}^{(\frac{p+1}{2})} \pmod{\mathfrak{M}^{s+\frac{p-1}{2}}}.$$

Отсюда

$$[[\,a,\ a_1'],\ a_1''] \equiv \alpha\, y_{n1}^{(p-1)} a \pmod{\mathfrak{M}^{s+p-1}},$$

где $\alpha = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p+1}{2} \frac{p+3}{4} \neq 0$. Через m_n шагов получим

$$g = [[[\cdots[[\,a,\ a_1'],\ a_1''],\ldots],\ a_{m_n}'],\ a_{m_n}''] \equiv$$

$$\equiv \alpha^{m_n} y_{n1}^{(p-1)} \ldots y_{nm_n}^{(p-1)} a \pmod{\mathfrak{M}^{s+m_n(p-1)}}, \qquad (4.6)$$

т.е. $g \neq 0$ и $\mathfrak{D}_g \in \mathfrak{C}^{2m-2}$. Лемма доказана.

Предложение 5.3. *Пусть* $p > 5$, *тогда класс нильпотентности сэндвичевой подалгебры* $\mathfrak{C}$ *в контактной алгебре Ли* $K(\mathfrak{F})$ *равен* $2m-1$.

Доказательство. В силу следствия 1.1, нам необходимо лишь показать, что $\mathfrak{C}^{2m-1} \neq 0$. Из доказательства леммы 5.2 получаем, что в $\mathfrak{C}^{2m-2}$ есть элемент $\mathfrak{D}_g$, где g имеет вид (4.6), но тогда многочлен

$$h = [\,g,\ y_{\tilde{1}1}^{(\frac{p-1}{2})} y_{11} y_{n'1}] \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{p+5}{2} \alpha^{m_n} y_{11}^{(\frac{p+3}{2})} \left[\prod_{l=2}^{m_1} y_{1l}^{(p-1)} \right] \times$$

$$\times\left[\prod_{i=2}^{n}\prod_{j=1}^{m_i} y_{ij}^{(p-1)}\right] \pmod{\mathfrak{M}^t}$$

(здесь $t = s + m_n(p-1) + \frac{p-1}{2}$) отличен от нуля и $\mathfrak{D}_h \in \mathfrak{C}^{2m-1}$.

Замечание 5.4. Если $p = 5$, то также как и в случае 2) доказательства леммы 4.4, имеем, что коэффициенты ненулевого элемента $\mathfrak{D}_a \in \mathfrak{C}^{2m-1}$ имеют порядок $4m - 1$, что возможно лишь при $a = e_{\mathfrak{F}}$. С другой стороны, в силу предложения 4.1 главы 0, если $n + 3 \equiv 0 \pmod{p}$, то $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \notin K(\mathfrak{F})$, т.е. $\mathfrak{C}^{2m-1} = 0$ и класс нильпотентности $\mathfrak{C}$ в этом случае равен $2m - 2$. Если же $n + 3 \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $\mathfrak{D}_{e_{\mathfrak{F}}} \in K(\mathfrak{F})$ и класс нильпотентности N в этом случае : $2m - 2 \leqslant N \leqslant 2m - 1$.

§ 6. Класс $\mathfrak{C}$ в алгебре Меликяна

Пусть $p = 5$, $n = 2$, $m = m_1 + m_2$, $\mathfrak{Z} = L(m_1, m_2)$ - алгебра Меликяна над K и $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Z})$ - сэндвичева подалгебра в $\mathfrak{Z}$. Из теоремы 1.1 главы 3 получаем

Следствие 6.1. $\mathfrak{C}^{2m} = 0$.

Доказательство. Рассмотрим фильтрацию в $\mathfrak{Z}$:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_{(-1)} \supset \mathfrak{Z}_{(0)} \supset \ldots \supset \mathfrak{Z}_{(r)} \supset 0,$$

где $\mathfrak{Z}_{(i)} = \mathfrak{M}^{i+1}\mathfrak{Z}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{M}^{i+1}\mathfrak{Z}_{\bar{1}} \oplus \mathfrak{M}^{i+1}\mathfrak{Z}_{\bar{2}}$ и $r = m(p-1) - 1$, тогда $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{Z}_{(\frac{p-1}{2})}$, откуда

$$\mathfrak{C}^{2m} \subset (\mathfrak{Z}_{(\frac{p-1}{2})})^{2m} \subset \mathfrak{Z}_{(m(p-1))} = 0.$$

С другой стороны, $\mathfrak{C}^{2m-1} \neq 0$, поскольку, в силу предложения 1.4, $\mathfrak{C}(W(\mathfrak{F}))^{2m-1} \neq 0$ $(n = 2)$, поэтому справедливо

Предложение 6.2. *Класс нильпотентности сэндвичевой подалгебры* $\mathfrak{C}$ *в алгебре Меликяна* $L(m_1, m_2)$ *равен* $2m - 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
2. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
3. Кац В.Г. Глобальные псевдогруппы Картана и простые алгебры Ли характеристики p. УМН, 1971, т.26, вып.3, с.199-200.
4. Кац В.Г. Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1974, т.38, N 4, с.800-834.
5. Кириллов С.А. Подалгебра вырождения в алгебре Цассенхауза. XIX Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений, Львов, 1987, ч.1, с.132.
6. Кириллов С.А. Специальная алгебра Ли картановского типа. Ин-т прикладной физики АН СССР, Препринт N 247, Горький, 1989.
7. Кириллов С.А. Гамильтонова алгебра Ли картановского типа. Ин-т прикладной физики АН СССР, Препринт N 257, Горький, 1990.
8. Кириллов С.А. О специальных и гамильтоновых алгебрах картановского типа. IV Всесоюзная школа "Алгебры Ли и их применения в математике и физике". Тезисы сообщений Казань, 1990, с.25-26.
9. Кириллов С.А. О сэндвичевой подалгебре в фильтрованных алгебрах Ли картановского типа. IV Всесоюзная школа "Алгебры Ли и их применения в математике и физике". Тезисы сообщений, Казань, 1990, с.27.
10. Кириллов С.А. Сэндвичева подалгебра в алгебрах Ли типа

S. Ин-т прикладной физики АН СССР, Препринт N 262, Горький, 1990.

11. Кириллов С.А. Сэндвичева подалгебра в алгебрах Меликяна. Ин-т прикладной физики АН СССР, Препринт N 285, Горький, 1990.

12. Кириллов С.А. Строение сэндвичевых подалгебр в алгебрах Меликяна. Международная конференция по алгебре памяти А.И.Ширшова. Тезисы докладов по теории колец, алгебр и модулей, Барнаул, 1991, с.49.

13. Кириллов С.А. Класс нильпотентности сэндвичевой подалгебры в общей алгебре Ли картановского типа. XVI Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы сообщений, Нижний Новгород, 1991, с.104.

14. Кириллов С.А. Сэндвичева подалгебра в алгебрах Ли картановского типа. Изв. ВУЗов. Математика, 1992, N 4, с.18-25.

15. Кириллов С.А. Сэндвичевы подалгебры в простых конечномерных алгебрах Ли. УМН, 1992, т.47, N 4, с.181-182.

16. Кострикин А.И. Параметрическое семейство простых алгебр Ли. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1970, т.34, с.744-756.

17. Кострикин А.И. Некоторые аспекты теории алгебр Ли. В кн.: Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск, 1973, с.142-160.

18. Кострикин А.И. Алгебры Ли и конечные группы. Тр. МИАН СССР, 1984, т.168, с.132-154.

19. Кострикин А.И. Вокруг Бернсайда. М.: Наука, 1986.

20. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. Псевдогруппы Картана и p-алгебры Ли. ДАН СССР, 1966, т.168, N 4, с.740-742.

21. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. Градуированные алгебры

Ли конечной характеристики. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1969, т.33, N 2, с.251-322.

22. Крекнин В.А. Существование максимальной инвариантной подалгебры в простых алгебрах Ли картановского типа. Матем. заметки, 1971, т.9, N 2, с.211-222.

23. Кузнецов М.И.Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p. Изв. АН СССР, Сер. мат., 1989, т.53, с.557-589.

24. Кузнецов М.И., Кириллов С.А. Гамильтоновы дифференциальные формы над алгеброй срезанных многочленов. УМН, 1986, т.41, N 2, с.197-198.

25. Кузнецов М.И., Кириллов С.А. Контактные формы над алгеброй срезанных многочленов. Ин-т прикладной физики АН СССР, Препринт N 151, Горький, 1986.

26. Меликян Г.М. О простых алгебрах Ли характеристики 5. УМН, 1980, т.35, вып.I, с.203-204.

27. Меликян Г.М. Простые неприводимые 2-градуированные алгебры Ли с компонентой $\mathfrak{L}_0 \cong W_1 \oplus \mathbf{k}$. Деп. в ВИНИТИ, N 1688-82, 1981.

28. Премет А.А. Алгебры Ли без сильного вырождения. Матем. сб., 1986, т.129, с.140-153.

29. Скрябин С.М. Канонический вид гамильтоновых и контактных форм над алгебрами разделенных степеней. Деп. в ВИНИТИ, N 8594-В86, 1986.

30. Скрябин С.М. Алгебры Ли дифференцирований коммутативных колец. Дисс... канд.физ.-матем.наук. Москва, 1987.

31. Скрябин С.М. Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней. Матем. сб., 1990, т.181, N I, с.114-133.

32. Тюрин С.А. Классификация деформаций специальной алгеб-

ры Ли картановского типа. Матем. заметки, 1978, т.24, N 6, с.847-857.

33. Эльстинг Г.О. Об одной инвариантной подалгебре в общей и специальной алгебрах Ли картановского типа. Деп. в ВИНИТИ, N 1198-75, 1975.

34. Эльстинг Г.О. Об одной инвариантной подалгебре в гамильтоновой и контактной алгебрах Ли картановского типа. Изв.ВУЗов, Математика, 1976, N 1, с.129-131.

35. Эльстинг Г.О. Фильтрации в простых алгебрах Ли конечной характеристики. Дисс... канд. физ.- матем. наук. Казань, 1976.

36. Albert A.A., Frank M.S. Simple Lie algebras of characteristic p. Rend. Torino, 1954/55, v.14, p.117-139.

37. Benkart G.M. Simple modular Lie algebras with 1-sections that are classical or solvable. Comm. Algebra, 1990, v.18, N11, p.3633-3638.

38. Benkart G.M. Osborn J.M., Strade H. Contributions to the classification of simple modular Lie algebras, to appear.

39. Benkart G.M., Gregory T.B., Osborn J.M., Strade H., Wilson R.L. Isomorphism classes of hamiltonian Lie algebras. Lect. Not. in Math., 1989, v.1373, p.42-57.

40. Block R.E. New simple Lie algebras of prime characteristic. Trans. AMS, 1958, v.89, p.421-449.

41. Block R.E., Wilson R.L. On filtered Lie algebras and divided power algebras. Comm. Algebra, 1975, v.3, p. 571-589.

42. Block R.E., Wilson R.L. The restricted simple Lie algebras are of classical or Cartan type. Proc.Nat.Acad. Sci. USA, 1984, v.81, p.5271-5274.

43. Block R.E., Wilson R.L. Classification of the restricted simple Lie algebras. J.Algebra, 1988, v.114, p.115-259.

44. Frank M.S. A new class of simple Lie algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, v.40, p.713-719.

45. Kuznetsov M.I. On Lie algebras of contact type. Comm. Algebra, I990, v.I8, N 9, p.2943-30I3.

46. Kuznetsov M.I. Melikyan algebras as Lie algebras of the type G_2. Comm. Algebra, I99I, v.I9, N 4, p.1281-1312.

47. Seligman G. Modular Lie algebras. N.Y.: Spring.-Verl., 1967.

48. Strade H. The absolute toral rank of a Lie algebra. Lect. Not. in Math., 1989, v.1373, p.1-28.

49. Strade H. The classification of simple modular Lie algebras: I. Determination of the two sections. Ann. Math., 1989, v.130, p.643-677.

50. Strade H. The classification of simple modular Lie algebras: II. The toral structure, to appear.

51. Strade H. The classification of simple modular Lie algebras: III. Solution of the classical case. Ann. Math., 1991, v.133, p.577-604.

52. Strade H., Wilson R.L. Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic. Trans. AMS, 1991,v.24, N2,p.357-362.

53. Wilson R.L. Nonclassical simple Lie algebras. Bull. AMS, 1969, v.75, N 5, p.987-991.

54. Wilson R.L. Classification of generalized Witt algebras over algebraically closed fields. Trans. AMS, 1971, v.153, p.191-210.

55. Wilson R.L. A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic. J.Algebra, 1976, v.40 p.418-465.

56. Wilson R.L. Simple Lie algebras of type S. J.Algebra, 1980, v.62, p.292-298.