

Обратные вторая и третья леммы Уайтхеда

Паша Зусманович

Tallinn University of Technology

pasha.zusmanovich@ttu.ee

Первая, соответственно, вторая лемма Уайтхеда гласит, что первые, соответственно, вторые кохомологии конечномерной полупростой алгебры Ли над полем характеристики 0 с коэффициентами в конечномерном модуле равны нулю. Для третьих и более высоких кохомологий это уже неверно, однако верно близкое утверждение, которое можно назвать третьей леммой Уайтхеда: если дополнительно потребовать чтобы представление было неприводимым и нетривиальным, то и высшие кохомологии равны нулю.

Все это хорошо известные классические результаты. Естественно задаться вопросом, верны ли обратные утверждения: будет ли из равенства нулю соответствующих кохомологий следовать полупростота алгебры. Для первой леммы Уайтхеда обращение хорошо и давно известно.

Странно, что до недавнего времени никто не задавался тем же самым вопросом для второй и третьей лемм.

Мы покажем, что эти обращения “почти верны”, а именно:

- Если вторые кохомологии конечномерной алгебры Ли над полем характеристики 0 в любом конечномерном модуле равны нулю, то алгебра либо одномерна, либо полупроста, либо есть прямая сумма полупростой и одномерной.
- Если все третьи и более высокие кохомологии конечномерной алгебры Ли размерности > 3 над полем характеристики 0 в любом неприводимом нетривиальном модуле равны нулю, то алгебра есть прямая сумма полупростой и нильпотентной.

Доказательство получается несложной комбинацией классических результатов о структуре (разложение Леви–Мальцева) и кохомологиях (спектральная последовательность Хохшильда–Серра) алгебр Ли, а так же двойственности Хазевинкеля [H].

По мотивам работ [Z1] и [Z2].

Список литературы

- [H] М. Хазевинкель, Теорема двойственности для кохомологии алгебр Ли, Мат. Сборник **83** (1970), 639–644.
- [Z1] P. Zusmanovich, A converse to the Second Whitehead Lemma, J. Lie Theory **18** (2008), 295–299; arXiv:0704.3864.
- [Z2] ———, A converse to the Whitehead Theorem, J. Lie Theory **18** (2008), 811–815; arXiv:0808.0212.